



**You have downloaded a document from
RE-BUS
repository of the University of Silesia in Katowice**

Title: Łamanie nierówności Leggetta-Garga w otwartych układach kwantowych

Author: Marcin Łobejko

Citation style: Łobejko, Marcin. (2018). Łamanie nierówności Leggetta-Garga w otwartych układach kwantowych. Praca doktorska. Katowice : Uniwersytet Śląski

© Korzystanie z tego materiału jest możliwe zgodnie z właściwymi przepisami o dozwolonym użytku lub o innych wyjątkach przewidzianych w przepisach prawa, a korzystanie w szerszym zakresie wymaga uzyskania zgody uprawnionego.



UNIwersytet ŚLĄSKI
W KATOWICACH



Biblioteka
Uniwersytetu Śląskiego



Ministerstwo Nauki
i Szkolnictwa Wyższego

**INSTYTUT FIZYKI IM. AUGUSTA CHEŁKOWSKIEGO
UNIwersytet śląski w KATOWICACH**

Rozprawa Doktorska

**Łamanie nierówności Leggetta–Garga
w otwartych układach kwantowych**

Marcin Łobejko

Promotor:

prof. dr hab. Jerzy Dajka

Promotor pomocniczy:

dr Bartłomiej Gardas

CHORZÓW 2018

Spis treści

1	Wstęp	1
2	Nierówności Leggetta–Garga	3
2.1	Korelacje nieklasyczne	4
2.2	Wyprowadzenie nierówności LGI	5
2.3	Łamanie LGI w przypadku izolowanego qubitu	7
2.4	Eksperymentalne łamanie LGI	9
3	Łamanie nierówności LGI w otwartych układach kwantowych	12
4	(A.1) Łamanie nierówności w otoczeniu termicznym	15
4.1	Wstęp	15
4.2	Model	16
4.3	Wyniki	19
4.4	Podsumowanie	21
	Artykuł (A.1)	22
5	(A.2) Łamanie nierówności w obecności białego szumu	28
5.1	Wstęp	28
5.2	Model	29
5.3	Wyniki	31
5.4	Podsumowanie	34
	Artykuł (A.2)	35
6	(A.3) Łamanie nierówności w wyniku oddziaływania nadsubtelnego	50
6.1	Wstęp	50
6.2	Model	51
6.3	Wyniki	53
6.4	Podsumowanie	55
7	(A.4) Łamanie nierówności w przypadku kwantowo-klasycznych hybryd	56
7.1	Wstęp	56
7.2	Model	57
7.3	Wyniki	58

7.4 Podsumowanie	59
Artykuł (A.4)	61
8 Podsumowanie	67
Oświadczenia współautora	70
Bibliografia	72

Rozdział 1

Wstęp

Niniejsza rozprawa doktorska „Łamanie nierówności Leggetta–Garga w otwartych układach kwantowych” jest wynikiem badań opublikowanych jako ciąg tematycznie spójnych artykułów w recenzowanych czasopismach. Artykuły wchodzące w skład rozprawy to:

(A.1) M. Łobejko, J. Łuczka, J. Dajka, Leggett–Garg inequality for qubits coupled to thermal environment, *Phys. Rev. A* 91, 042113. (2015)

<https://doi.org/10.1103/PhysRevA.91.042113>

(A.2) J. Dajka, M. Łobejko, J. Łuczka, Leggett–Garg inequalities for a quantum top affected by classical noise, *Quantum Inf Process* (2016) 15: 4911.

<https://doi.org/10.1007/s11128-016-1401-1>

(A.3) M. Łobejko, J. Dajka, Leggett–Garg inequalities violation via the Fermi contact hyperfine interaction, *Fortschr. Phys.* 2017, 65, 1600041

<https://doi.org/10.1002/prop.201600041>

(A.4) M. Łobejko, J. Dajka, Violation of Leggett–Garg inequalities for quantum-classical hybrids, *J. Phys.: Conf. Ser.* 626 012038 (2015)

<https://doi.org/10.1088/1742-6596/626/1/012038>

Powyższe publikacje zawierają analizę otrzymanych teoretycznych wartości funkcji korelacyjnych w czasie dla otwartych układów kwantowych w kontekście łamania nierówności Leggetta–Garga. Łamanie wspomnianych nierówności oznacza wykazywanie przez układ korelacji nieklasycznych stosowanych np. do testów makroskopowego realizmu, oceny „kwantowości” układu lub w protokołach w teorii informacji. Głównym

celem badawczym rozprawy jest określenie wpływu oddziaływania z zewnętrznym otoczeniem na zasób nieklasycznych korelacji właściwego podukładu mierzonego. Powyższe artykuły prezentują cztery różne fizyczne modele układów otwartych. W pierwszym z nich przedstawiono łamanie nierówności w układzie słabo sprzężonym z otoczeniem termicznym, w którym przedyskutowano procesy dyssypacji i dekoherencji. Kolejny model dotyczy wpływu białego szumu na nieklasyczne korelacje w czasie w wyniku ewolucji układów kwantowych, których dynamika reprezentowana jest algebrą operatorów momentu pędu. W ostatnich dwóch artykułach obliczono korelator nierówności Leggetta–Garga dla układów oddziałujących w wyniku sprzężenia typu spin-spin. W tym kontekście przedstawiono konkretny fizyczny model atomów z pierwszej grupy układu okresowego oraz model kwantowo-klasycznego układu hybrydowego, dla którego przedyskutowano przybliżenie semi-klasyczne.

Uzupełnieniem pracy doktorskiej są następujące opublikowane artykuły:

- M. Łobejko, J. Dajka, J. Łuczka, Self-averaging of random quantum dynamics, arXiv:1805.02871 [quant-ph] (2018)
<https://arxiv.org/abs/1805.02871>
- M. Łobejko, P. Talkner, J. Łuczka, Work distributions for random sudden quantum quenches, Phys. Rev. E 95, 052137 (2017)
<https://doi.org/10.1103/PhysRevE.95.052137>
- M. Łobejko, M. Mierzejewski, J. Dajka, Interference of qubits in pure dephasing and almost pure dephasing environments, J. Phys. A, 48 275302 (2015)
<https://doi.org/10.1088/1751-8113/48/27/275302>
- J. Dajka, D. Kłoda, M. Łobejko, J. Ślaskowski, Quantum two player game in thermal environment, PLOS ONE 10(8): e0134916.
<https://doi.org/10.1371/journal.pone.0134916>
- J. Dajka, M. Łobejko, J. Ślaskowski, Payoffs and coherence of quantum two player game in thermal environment, Entropy 17(11), 7736-7751 (2015)
<https://doi.org/10.3390/e17117736>

Słowa kluczowe:

nierówności Leggetta–Garga, korelacje nieklasyczne, kwantowe układy otwarte

Rozdział 2

Nierówności Leggetta–Garga

Rozważane w niniejszej rozprawie nierówności Leggetta–Garga (LGI, od ang. *Leggett–Garg inequalities*) [1] są naturalnym, historycznym następstwem nierówności Bella (BI, od ang. *Bell inequalities*) [2]. Oba sformułowania dotyczą ograniczeń na funkcje korelacji wykazywane przez typowo „klasyczne” układy, przy czym nierówności LGI dotyczą korelacji w czasie, a BI korelacji w przestrzeni¹. Wspomniana „klasyczność” odnosi się do naturalnych założeń, wynikających z intuicyjnego postrzegania świata, które powinna spełniać teoria fizyczna. W przypadku nierówności Bella założenia te nazywa się *lokalnym realizmem*, co oznacza po pierwsze, że wyniki pomiarów wielkości fizycznych są zdeterminowane przez pewne „lokalne zmienne ukryte”, które istnieją przed i niezależnie od aktu obserwacji, oraz po drugie, że odseparowane przestrzennie podukłady nie mogą oddziaływać ze sobą z nieskończoną prędkością. Sformułowanie Leggetta i Garga opiera się natomiast na założeniach[1]:

- (Z.1) *Makrorealizm per se*. Układ, który może znajdować się w dwóch lub więcej rozróżnialnych stanach, w dowolnej chwili czasu zawsze znajduje się w jednym z nich.
- (Z.2) *Nie-inwazyjność pomiaru*. Stan układu może być zmierzony w wyniku nieinwazyjnego pomiaru, który nie zmienia aktualnego stanu układu, a także nie wpływa na stan układu w przyszłości.

Oba założenia nazywane są *makroskopowym realizmem* (lub w skrócie *makrorealizmem*) w sensie szerszym. Makrorealizm pierwotnie został sformułowany jako przeciwstawny

¹Z tego powodu nierówności Leggetta–Garga czasami nazywa się również *czasowymi nierównościami Bella*.

pogląd do mechaniki kwantowej (MK), który miał na celu przetestować jej stosowność w makroskopowych skalach przestrzennych [3–5]. Na tej podstawie (w analogii do pracy Bella) zostały sformułowane empiryczne przewidywania w postaci nierówności LGI [1, 6], które fundamentalnie ograniczają możliwe korelacje w czasie dla dowolnych mierzalnych wielkości, jeśli tylko spełniają założenia (Z.1-2). W szczególności zasada superpozycji² zaprzecza założeniom (Z.1) i (Z.2), co prowadzi do łamania nierówności LGI w opisie kwantowym. Rozważania nad przyczyną dlaczego mechanika kwantowa nie spełnia założeń makrorealizmu prowadzą do idei kota Schrödingera [7] lub do nieuchronnej inwazyjności pomiaru (nawet bez zaistniałego fizycznego oddziaływania [8–11]). Do tej pory brak eksperymentalnego potwierdzenia łamania nierówności LGI dla oczekiwanej skali makroskopowej [6] nie daje jasnej odpowiedzi czy stosowność mechaniki kwantowej (w szczególności zasada superpozycji) jest uzasadniona w tej skali. Pomimo tego szereg eksperymentów w skali mikroskopowej wykazał doświadczalne łamanie LGI zgodnie z przewidywaniami mechaniki kwantowej (zobacz Rozdział 2.4).

2.1 Korelacje nieklasyczne

Korelacje, które prowadzą do nieintuicyjnego łamania nierówności LGI dalej będziemy nazywać *korelacjami nieklasycznymi*. Abstrahując od testów makrorealizmu, korelacje te są same w sobie interesujące również dla układów mikroskopowych [6]. Powstanie idei splątania w czasie [12, 13], wykorzystanie w teorii informacji i w kwantowej informatyce [14, 15], czy nawet możliwość rozróżnienia pomiędzy neutrinem Diraca i Majorany [16] są tylko przykładami znaczenia analizy nieklasycznych korelacji w czasie. Poza tym łamanie nierówności LGI jest naturalną miarą „kwantowości” [17, 18], czyli zdolności układu do pozostawania w stanie superpozycji. W całkowicie nowym ujęciu kwantowej koherencji jako teorii zasobów [19, 20] takie kryteria mogą być bardzo przydatnym narzędziem w praktycznych zastosowaniach.

Korelacje w czasie nie są jednak jedynym przykładem korelacji nieklasycznych. Wspomniane wyżej nierówności Bella naturalnie prowadzą do idei nieklasycznych korelacji w przestrzeni, które w tym ujęciu nazywa się korelacjami *nielokalnymi* (ściśle związane z konceptem stanów splątanych [21]). Poza tym Kochen i Specker [22] wprowadzili trzeci rodzaj nieklasycznych korelacji występujących w układach kwantowych, który nazwano *kontekstualnością*. Można powiedzieć, że *nie-makrorealność*, *nielokalność*

²Fundamentalna z samego faktu, że przestrzeń stanów w MK jest przestrzenią liniową.

i *kontekstualność* wynikają z tego samo źródła, czyli braku istnienia w mechanice kwantowej łącznych rozkładów prawdopodobieństwa wielkości niezmiernych [23]. Związek wszystkich typów nieklasycznych korelacji został naturalnie poruszony w literaturze [24]. Przykładowo najbardziej znany rodzaj nierówności Bella typu CHSH [25] można natychmiast otrzymać w domenie czasowej jeśli tylko odpowiednio zamienimy przestrzennie odseparowane pomiary wykonane na podukładach, na odseparowane w czasie pomiary na układzie pojedynczym [12]. Ta prosta obserwacja prowadzi do bardziej rygorystycznych twierdzeń określających związek między korelacjami w czasie i przestrzeni [26, 27]. Należy jednak zwrócić uwagę na występujące różnice pomiędzy jednymi i drugimi. Rozbieżność ta naturalnie musi pojawiać się ze względu na ewidentnie odmienny w kwantowej teorii charakter czasu (traktowany jako rzeczywisty parametr) i przestrzeni (wprowadzonej w postaci hermitowskiego operatora położenia). Przykładowo rozważając korelacje wyższego wymiaru, splątanie w przestrzeni jest znane jako *monogamiczne*³[21], natomiast analogiczne korelacje w czasie można określić jako *poligamiczne* [6]. Podobna różnica pomiędzy korelacjami w czasie i przestrzeni została także przedstawiona w pracy [28], która pokazuje zdecydowanie inną strukturę przestrzeni probabilistycznej lokalnego realizmu i makrorealizmu, co uwydatnia znaczną różnicę pomiędzy nierównościami LGI i BI.

2.2 Wyprowadzenie nierówności LGI

Aby wyprowadzić najprostsze z możliwych nierówności Leggetta–Garga rozważmy eksperyment, w którym wykonywany jest dwukrotnie pomiar w trzech różnych chwilach czasu $t_1 < t_2 < t_3$. Załóżmy dalej, że w każdej chwili czasu t_i mierzona jest w pomiarze \mathcal{P}_i ta sama wielkość Q , która zawsze przyjmuje tylko dwie z możliwych wartości $q_i = \pm 1$ (dla $i = 1, 2, 3$). Ponieważ w każdej realizacji doświadczenia pomiar wykonywany jest tylko dwukrotnie, w wyniku serii eksperymentów przeprowadzonych na zespole statystycznym, możemy określić trzy rozkłady prawdopodobieństwa, odpowiednio:

$$p(q_1, t_1; q_2, t_2 | \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2), \quad p(q_2, t_2; q_3, t_3 | \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3), \quad p(q_1, t_1; q_3, t_3 | \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_3), \quad (2.1)$$

gdzie rozkład $p(q_i, t_i; q_j, t_j | \mathcal{P}_i, \mathcal{P}_j)$ oznacza prawdopodobieństwo otrzymania wartości q_i w czasie t_i w wyniku pomiaru \mathcal{P}_i oraz wartość q_j w czasie t_j w wyniku pomiaru \mathcal{P}_j .

³Co dla trzech qubitów A, B i C oznacza, że jeśli A jest maksymalnie kwantowo skorelowany z B, to nie może być w żaden sposób skorelowany z C.

Zgodnie z założeniami makrorealizmu (A.1-2) istnieje również rozkład trójwymiarowy [23], taki że:

$$p(q_i, t_i; q_j, t_j | \mathcal{P}_i, \mathcal{P}_j) = \sum_{q_k, k \neq i, j} p(q_1, t_1; q_2, t_2; q_3, t_3) \quad (2.2)$$

dla $i, j = 1, 2, 3$ oraz $i \neq j$, co oznacza, że dowolny rozkład (2.1) może zostać otrzymany jako marginalny rozkład makrorealny wyższego wymiaru. Poprzez niezależność rozkładu $p(q_1, t_1; q_2, t_2; q_3, t_3)$ od procedury pomiarowej \mathcal{P}_i , zostało podkreślone, że rozkład ten (ze względu na założenie (Z.2)) nie zależy w żaden sposób od kolejności pomiaru wartości q_1, q_2 oraz q_3 , co dla pomiaru inwazyjnego mogłoby mieć wpływ na odpowiednie rozkłady dwuwymiarowe⁴. Innymi słowy można powiedzieć, że rozkład ten jest obiektywnym elementem rzeczywistości, niezależnym od tego czy fizyczny pomiar był lub nie był wykonany.

Na tej podstawie wprowadzając do opisu funkcję korelacyjną:

$$C_{ji} := \sum_{q_i, q_j} q_i q_j p(q_i, q_j | \mathcal{P}_i, \mathcal{P}_j), \quad (2.3)$$

gdzie dla uproszczenia notacji pominięto chwile czasu, w których pomiar jest wykonywany, otrzymujemy:

$$C_{ji} = p(+, + | \mathcal{P}_i, \mathcal{P}_j) + p(-, - | \mathcal{P}_i, \mathcal{P}_j) - p(+, - | \mathcal{P}_i, \mathcal{P}_j) - p(-, + | \mathcal{P}_i, \mathcal{P}_j). \quad (2.4)$$

Odwołując się do rozkładu (2.2) powyższą funkcję korelacyjną (w różnych chwilach czasu) możemy wyrazić w następujący sposób:

$$\begin{aligned} C_{21} = & p(+, +, +) + p(+, +, -) + p(-, -, +) + p(-, -, -) \\ & - p(+, -, +) - p(+, -, -) - p(-, +, +) - p(-, +, -), \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} C_{32} = & p(+, +, +) + p(-, +, +) + p(+, -, -) + p(-, -, -) \\ & - p(+, +, -) - p(-, +, -) - p(+, -, +) - p(-, -, +), \end{aligned} \quad (2.6)$$

oraz

$$\begin{aligned} C_{31} = & p(+, +, +) + p(+, -, +) + p(-, +, -) + p(-, -, -) \\ & - p(+, +, -) - p(+, -, -) - p(-, +, +) - p(-, -, +). \end{aligned} \quad (2.7)$$

⁴Na przykład wartość q_3 mogłaby zależeć od tego czy przed nią był wykonany pomiar \mathcal{P}_1 , czy \mathcal{P}_2 .

Następnie biorąc kombinację liniową w postaci:

$$\begin{aligned} C_{21} + C_{32} - C_{31} &= \sum_{q_1, q_2, q_3} p(q_1, q_2, q_3) - 4[p(+, -, +) + p(-, +, -)] \\ &= 1 - 4[p(+, -, +) + p(-, +, -)], \end{aligned} \quad (2.8)$$

gdzie skorzystano z zupełności rozkładu (2.2), oraz ze względu na to, że prawdopodobieństwo $p(q_1, q_2, q_3)$ przyjmuje maksymalną wartość 1 i minimalną 0 (dla dowolnego q_1, q_2 i q_3), ostatecznie otrzymujemy nierówność:

$$-3 \leq C_{21} + C_{32} - C_{31} \leq 1, \quad (2.9)$$

która jest najprostszym przykładem *nierówności Leggetta-Garga* [1, 6] dla pomiarów w trzech chwilach czasu. W ogólnym przypadku, gdy wykonywane jest n pomiarów w różnych chwilach czasu, definiujemy tzw. *korelator LGI*:

$$K_n = C_{21} + C_{32} + \dots + C_{n,n-1} - C_{n,1}, \quad (2.10)$$

z którego można wyprowadzić uogólnione nierówności w postaci [6]:

$$\begin{aligned} -2n + 1 &\leq K_{2n-1} \leq 2n - 3, \\ -2n + 2 &\leq K_{2n} \leq 2n - 2, \end{aligned} \quad (2.11)$$

gdzie $n \geq 2$.

2.3 Łamanie LGI w przypadku izolowanego qubit

W tym rozdziale zostanie zaprezentowane jak powyższy eksperyment w czasie jest opisywany w formalizmie mechaniki kwantowej oraz jak ten opis prowadzi do łamania LGI. Jako kwantowy paradygmat łamania nierówności przyjmujemy izolowany układ o dwóch stanach (tzw. qubit), który ewoluuje w czasie w sposób unitarny. Układ ten nie tylko jest jednym z najprostszych w analizie teoretycznej, co zapewni klarowność prezentacji, ale również nieklasyczne korelacje wykazywane przez izolowany qubit w dalszej części rozprawy będą punktem odniesienia do badań nad układami otwartymi.

Dodatkowo zakładamy, że pomiar wykonywany nad układem jest idealnie rzutowy, co oznacza, że fizyczny pomiar \mathcal{P}_i w czasie t_i (dla $i = 1, 2, 3$) reprezentowany jest operatorem rzutowym Π_{q_i} , który określa prawdopodobieństwo otrzymania wartości $q_i = \pm 1$

oraz stan układu po pomiarze. Innymi słowy mierzona wielkość dychotomiczna Q reprezentowana jest kwantową obserwabłą (czyli operatorem hermitowskim działającym w przestrzeni Hilberta), którą można przedstawić w postaci:

$$Q = \sum_{q=\pm 1} q \Pi_q. \quad (2.12)$$

Przyjmując ponadto stan początkowy (w ogólności) jako operator gęstości $\rho(0)$ i zakładając, że dynamika układu jest generowana przez Hamiltonian H , tak że operator ewolucji jest postaci $U_{t,s} = e^{-\frac{i}{\hbar} H(t-s)}$ (\hbar to stała Plancka), dwuwymiarowe rozkłady prawdopodobieństwa (2.1) w formalizmie kwantowym wyrażają się następująco:

$$p(q_i, q_j | \mathcal{P}_i, \mathcal{P}_j) = \text{Tr}[\Pi_{q_j} U_{t_j, t_i} \Pi_{q_i} U_{t_i, 0} \rho(0) U_{t_i, 0}^\dagger \Pi_{q_i} U_{t_j, t_i}^\dagger]. \quad (2.13)$$

Powyższe wyrażenie pozwala obliczyć wszystkie trzy funkcje korelacyjne C_{ji} (2.3), a następnie funkcję K_3 (2.10), co zostanie wykorzystane w dalszych badaniach nad układami otwartymi (zobacz Rozdział 3).

W celu prezentacji jak konkretna dynamika układu kwantowego prowadzi do zależnej od czasu funkcji K_3 , zostanie przedstawiony kwantowy paradygmat układu o dwóch stanach, którego ewolucja w czasie generowana jest poprzez Hamiltonian:

$$H = \frac{1}{2} \omega \sigma_z, \quad (2.14)$$

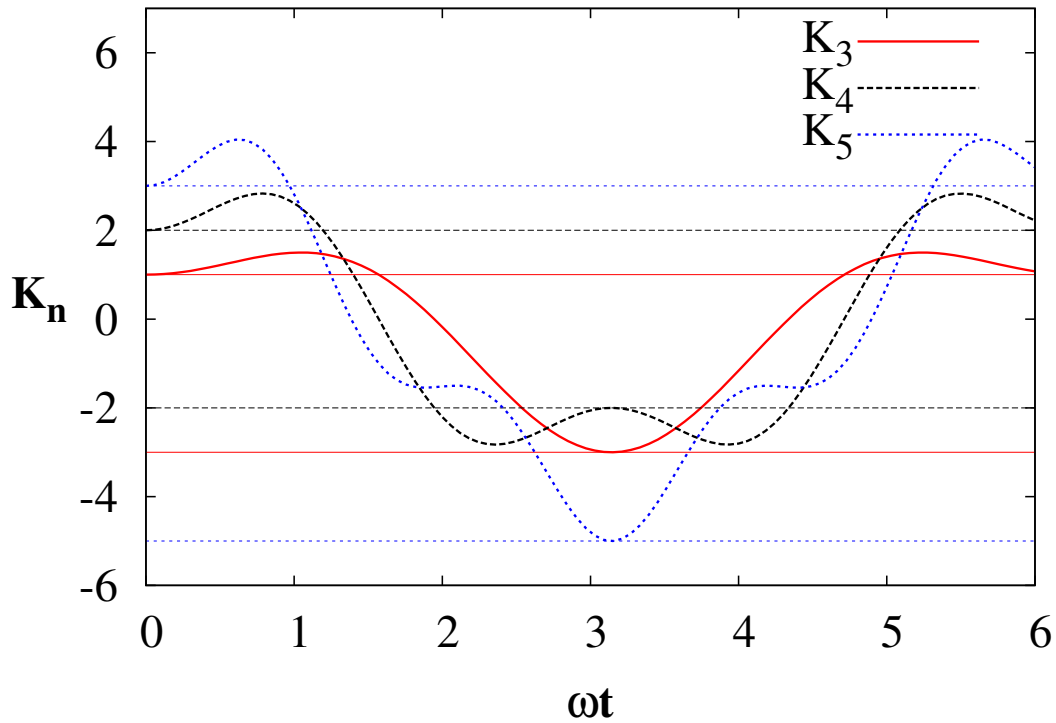
który w równych odstępach czasu (tzn. $t_{k+1} - t_k = \tau$) podlega pomiarowi obserwabli $Q = \sigma_x$. Prowadzi to do postaci funkcji [29]:

$$K_n = (n - 1) \cos(\omega\tau) - \cos[(n - 1)\omega\tau], \quad (2.15)$$

której graficzną reprezentację dla przypadku $n = 3, 4, 5$ przedstawiono na rysunku poniżej. Funkcja K_n przyjmuje maksimum dla wartości $\omega\tau = \pi/n$:

$$K_n^{max} = n \cos\left(\frac{\pi}{n}\right), \quad (2.16)$$

co dla przypadku $n = 3$ prowadzi do $K_3^{max} = 3/2$. Okazuje się, że jest to maksymalna wartość dostępna dla układów kwantowych w wyniku rzutowego pomiaru niezależnie od postaci Hamiltonianu H [30].



RYSUNEK 2.1: Funkcje K_n (dla $n = 3, 4, 5$) obliczone dla izolowanego qubitu (2.14) wraz z zaznaczonymi ograniczeniami LGI.

2.4 Eksperymentalne łamanie LGI

Na koniec tego pogładowego wstępu teoretycznego na temat nierówności Leggetta–Garga przytoczono również koncepcję *idealnie negatywnego pomiaru* oraz kilka wybranych eksperymentów, które ujawniły obecność nieklasycznych korelacji w rzeczywistych układach. Doświadczenia te mogą odnosić się wprost do weryfikacji przewidywań mechaniki kwantowej lub do testów makrorealizmu.

W przypadku tych drugich, eksperymenty muszą spełniać dodatkowe kryteria [1, 6], tak aby doświadczenie nie zawierało wewnętrznych luk (ang. *loophole*)⁵. Podstawowym kryterium poprawnego testu makrorealizmu jest wymóg, aby przeprowadzone pomiary na układach były nieinwazyjne w klasycznym sensie, w przeciwnym razie, zaobserwowane łamanie LGI zawsze można wytłumaczyć niekontrolowanym wpływem samego pomiaru⁶. Wywołana powyżej nie-inwazyjność w sensie „klasycznym” wcale nie oznacza jednak nie-inwazyjności w sensie kwantowym [35–37]. W skrócie idea ta zakłada,

⁵Podobne luki były również w systematyczny sposób „zamykane” w testach lokalnego realizmu, zobacz [31–34].

⁶Bez tego wymogu również układy klasyczne w trywialny sposób są zdolne do łamania nierówności LGI.

że jeśli eksperymentator dołoży wszelkich starań, aby zapewnić nie-inwazyjność (w sensie klasycznym), natomiast układ nadal zachowuje się jakby pomiar był inwazyjny (jak to ma miejsce w opisie i eksperymentach kwantowych), to oznacza to po prostu negatywny wynik testów makrorealizmu [37]. Natomiast jeśli eksperymentator nie zapewni nie-inwazyjności w sensie klasycznym to sam test makrorealizmu jest błędnie przeprowadzony, bo zawiera w sobie wewnętrzną lukę.

Aby zapewnić nie-inwazyjność w sensie klasycznym została zaproponowana koncepcja *pomiaru idealnie negatywnego* [1], która prowadzi do testu makrorealizmu wolnego od luk. Idealnie negatywny pomiar dla dychotomicznej obserwabli $Q = \pm 1$ polega na inwazyjnym pomiarze jednej z dwóch wartości (np. $Q = +1$) i selekcję tylko tych przypadków, w których inwazyjny pomiar daje wynik negatywny, co oznacza, że użyty detektor nie wykazuje żadnej reakcji i w pośredni sposób mierzy wartość $Q = -1$. Przykładowo mierząc cząstkę o spinie $1/2$ w aparaturze Sterna–Gerlacha rozszczepiamy wiązkę na dwie części. Na drodze górnej trajektorii ustawiamy detektor, który mierzy inwazyjnie spin skierowany do góry. Kiedy jednak detektor „nie wypala” oznacza to jednocześnie, że cząstka musiała przejść trajektorią dolną (ze spinem skierowanym w dół). W ten sposób, bez żadnego fizycznego oddziaływania, a więc w idealnie negatywny sposób, można pozyskać informację o stanie cząstki, co rozumiemy przez nie-inwazyjność w sensie klasycznym. Dokładnie tego typu idealnie negatywny pomiar w aparaturze Sterna–Gerlacha został zaproponowany w celu weryfikacji wyników badań prezentowanych w artykule (A.3) niniejszej rozprawy doktorskiej (zobacz Rozdział 6).

Powyższa idea klasyfikuje więc eksperymentalne testy LGI na dwie kategorie: te które zostały wykonane w sposób idealnie negatywny (w celu testów makrorealizmu) i te w których o brak inwazyjności (w sensie klasycznym) nie zabiegano. Należy jednak podkreślić, że oba typy eksperymentów nadal są weryfikacją przewidywań mechaniki kwantowej. Poza tym łamanie nierówności LGI w wyniku inwazyjnego pomiaru nadal jest interesującym tematem [15, 38].

Historycznie pierwszym eksperymentalnym łamaniem LGI było doświadczenie wykonane na pseudo-makroskopowym nadprzewodzącym układzie o dwóch stanach [39], które zostało przeprowadzone w schemacie słabego pomiaru. Pojedynczy punkt eksperymentalny ujawnił wartość $K_3 > 1$, jednak dalsza dyskusja wykazała, że nadal nie jest to pomiar oczekiwanej wielkości makroskopowej [3], a sam słaby pomiar niekoniecznie musi być nieinwazyjny (zobacz dyskusję tego faktu w pracy przeglądowej [6]). Przykładem eksperymentów wykonanych w sposób idealnie negatywny jest pomiar spinu domieszek fosforu w krzemie [40] oraz realizacja „kwantowego błędzenia” na sieciach

optycznych [18]. Innym przykładem doskonale potwierdzającym przewidywania MK (choć w wyniku inwazyjnego pomiaru) jest realizacja pomiaru rzutowego przy użyciu rezonansu magnetycznego [29]. Ostatnim czasem, stosując tą samą technikę pomiarową, odnotowano również pierwsze próby łamania LGI powyżej tzw. granicy Lüders’a [41] (przewidziane teoretycznie w pracy [42]). Dodatkowo interesującym faktem jest to, że oscylujące neutrina także wykazują nieklasyczne korelacje w czasie [43].

Rozdział 3

Łamanie nierówności LGI w otwartych układach kwantowych

W kolejnych rozdziałach przedstawiona zostanie zasadnicza treść niniejszej rozprawy, czyli opis badań i wyników otrzymanych w artykułach (A.1-4). Podstawowym wkładem w dziedzinie nieklasycznych czasowych korelacji, uzyskanym w tej pracy, jest traktowanie mierzonego układu jako układu otwartego. Oznacza to, że przestrzeń Hilberta właściwego układu mierzonego \mathcal{H}_S , jest rozszerzona o dodatkowe stopnie swobody otoczenia należące do przestrzeni \mathcal{H}_E lub w postaci dodatkowej zmiennej stochastycznej jak w modelu (A.2) (zobacz Rozdział 5). Głównym celem badań jest określenie jak różne sprzężenia układu z otoczeniem wpływają na korelator LGI. W tym celu rozważono słabo oddziałujące otoczenie termiczne (A.1), obecność białego szumu (A.2) oraz oddziaływanie typu spin-spin (A.3,4).

Do wszystkich przedstawionych w dalszej części badań (A.1-4) stosują się następujące założenia ogólne:

- I. W każdym przypadku obliczona została teoretyczna wartość funkcji K_3 . Odnosi się to do sytuacji, gdy układ jest mierzony dwukrotnie (w pojedynczym przebiegu eksperymentu) i w trzech różnych chwilach czasu t_1, t_2 i t_3 . Założono ponadto, że czasy te są równoodległe, czyli $t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = \tau$. W ten sposób interwał τ jest jedyną zmienną, od której zależy wartość funkcji K_3 . Dla tak zdefiniowanego schematu pomiarowego dowolnej obserwabli dychotomicznej $Q = \pm 1$ nierówność Leggetta–Garga przyjmuje postać:

$$-3 \leq K_3 \leq 1. \tag{3.1}$$

- II. Wszystkie wykonywane pomiary dotyczą tej samej dychotomicznej obserwabli Q , która w formalizmie mechaniki kwantowej reprezentowana jest przez operatory rzutowe Π_+ oraz Π_- działające w przestrzeni \mathcal{H}_S , tak że

$$Q = \Pi_+ - \Pi_- . \quad (3.2)$$

Z punktu widzenia pełnego układu izolowanego, pomiar na podukładzie S reprezentowany jest operatorem rzutowym $P_{\pm} = \Pi_{\pm} \otimes I$ działającym w przestrzeni $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E$, gdzie I to operator identycznościowy. W tym przypadku kwantowe ograniczenia funkcji K_3 są następujące [30]:

$$-3 \leq K_3^{(qm)} \leq 3/2, \quad (3.3)$$

co oznacza, że układ kwantowy łamie nierówność LGI dla wartości $K_3 \in (1, 1.5]$. Zmierzona wartość obserwabli Q w czasie t_i wynosi q_i .

- III. Dwuwymiarowe prawdopodobieństwo $p(q_i, t_i; q_j, t_j)$ otrzymania wartości q_i w czasie t_i oraz wartości q_j w czasie t_j w formalizmie mechaniki kwantowej można wyrazić jako:

$$p(q_i, t_i; q_j, t_j) = \text{Tr} \left(P_{q_j} U_{t_j, t_i} P_{q_i} U_{t_i, 0} \rho(0) U_{t_i, 0}^{\dagger} P_{q_i} U_{t_j, t_i}^{\dagger} \right), \quad (3.4)$$

gdzie

$$U_{t,s} = e^{-iH(t-s)/\hbar}, \quad (3.5)$$

gdzie \hbar to stała Plancka. Stan początkowy $\rho(0)$ jest łącznym stanem układu i otoczenia, podobnie jak H jest pełnym Hamiltonianem działającym w przestrzeni $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E$. Na tej podstawie można obliczyć funkcję korelacyjną w postaci:

$$C_{ji} = \sum_{q_j, q_i} q_j q_i p(q_i, t_i; q_j, t_j), \quad (3.6)$$

która wyrażona dla różnych czasów $t_k = k\tau$ (dla $k = 1, 2, 3$) wprost prowadzi do korelatora:

$$K_3 = C_{21} + C_{32} - C_{31}. \quad (3.7)$$

Streszczenie badań i prezentacja wyników zostanie przedstawiona w następującej formie:

- 1) *Wstęp* zawiera ogólny opis proponowanego układu, podstawowej motywacji do badania go w kontekście korelacji w czasie oraz skrót otrzymanych wyników;
- 2a) *Model - sprzężenie z otoczeniem* to podrozdział zawierający szczegółowy opis modelu układu i jego sprzężenia z otoczeniem, który został zastosowany w badaniach;
- 2b) *Model - mierzona obserwabla i warunki początkowe* zawiera opis teoretyczny mierzonej obserwabli reprezentowanej operatorami rzutowymi i warunków początkowych układu w postaci macierzy gęstości;
- 3) *Wyniki* przedstawiają obliczone wartości K_3 wraz z analizą dotyczącą korelacji pomiędzy własnościami fizycznymi układu i łamaniem nierówności LGI;
- 4) *Podsumowanie* zawiera ogół wniosków wyciągniętych w prezentowanych badaniach.

W streszczeniu każdego z poszczególnych modeli zostaną zastosowane następujące odwołania do treści zawartej w artykułach:

- $R.k.n$ - oznacza n -ty rysunek zamieszczony w artykule $A.k$ (np. $R.2.1$ oznacza pierwszy rysunek w drugim artykule)
- $E.k.n$ - oznacza n -te równanie zamieszczone w artykule $A.k$ (np. $E.1.3$ oznacza trzecie równanie w pierwszym artykule)
- $B.k.n$ - oznacza n -ty wpis w bibliografii zamieszczony w artykule $A.k$ (np. $B.3.2$ oznacza drugi wpis w trzecim artykule)

Rozdział 4

(A.1) Łamanie nierówności w otoczeniu termicznym

4.1 Wstęp

W pierwszym z zaproponowanych w tej rozprawie badanych procesów, dla którego przeanalizowano obecność nieklasycznych korelacji wynikających z łamania nierówności Leggetta–Garga, jest układ pojedynczego qubitu słabo sprzężonego z otoczeniem termicznym (ulegającego procesom dyssypacji i/lub dekoherencji) oraz układ dwóch qubitów, gdzie tylko jeden z nich oddziałuje ze wspomnianym otoczeniem, a drugi jest izolowany. Dla obu przypadków otrzymano analityczną postać funkcji K_3 dla różnych schematów pomiarowych. W pracy wykazano, że w zależności od wyboru mierzonej obserwacji, korelator nierówności LGI wykazuje obszary, które są niezależne od pewnych aspektów otoczenia takich jak dyssypacja, dekoherencja lub temperatura termostatu.

Analiza wpływu otoczenia termicznego na łamanie nierówności LGI jest niezwykle istotna z punktu widzenia praktycznego. Z jednej strony słabe oddziaływanie z otoczeniem jest nieodzownym elementem każdego z rzeczywistych układów, dlatego uwzględnienie efektów wynikających z tego sprzężenia jest konieczne przy opisie dowolnego eksperymentu mającego na celu zmierzenie korelatora nierówności K_3 . Z drugiej strony wpływ otoczenia na korelacje w czasie może posłużyć również jako swoista charakterystyka samego otoczenia. Zrozumienie na poziomie podstawowym jak oddziaływanie z otoczeniem (powodujące przejście od domeny kwantowej do klasycznej) wpływa na obecność nieklasycznych korelacji układu jest samo w sobie również ciekawym zagadnieniem. W szczególności interesujące jest ustalenie maksymalnej wartości funkcji K_3

w zależności od otoczenia oraz skal czasowych w jakich układ nieodwracalnie przestaje łamać LGI. Ostatnie badania (B.1.8) pokazały, że tego typu procesy jak dekoherencja mogą wykazywać nietrywialny wpływ na łamanie tych nierówności.

4.2 Model

Sprzężenie z otoczeniem

Dla układów kwantowych oddziaływanie z otoczeniem termicznym zawiera w sobie dwa fundamentalne komponenty, którymi są dyssypacja i dekoherencja. Pierwszy z nich (obecny również w fizyce klasycznej) polega na losowym transferze energii pomiędzy otoczeniem i układem, który dla długich czasów asymptotycznie prowadzi do populacji stanów (diagonalnych elementów macierzy gęstości) danej rozkładem Gibbsa, charakteryzowanym pojedynczym parametrem – temperaturą T . Drugi proces jest efektem czysto kwantowym i polega na nieodwracalnym splątaniu układu z otoczeniem, które dla dużej liczby stopni swobody prowadzi do tak zwanej dekoherencji [44], czyli zaniku kwantowej koherencji (pozadiagonalnych wyrazów macierzy gęstości). Oba procesy można (teoretycznie i eksperymentalnie) opisać za pomocą czasów charakterystycznych: czasu relaksacji τ_E dla procesu dyssypacji i czasu zaniku fazy τ_D dla czystej dekoherencji, które wprowadzają odpowiednie skale czasowe w analizowanym modelu.

W celu opisu słabego sprzężenia układu z otoczeniem termicznym w artykule (A.1) odwołano się do teorii map Daviesa (B.1.11 oraz [45–47]). W tym podejściu przyjmuje się, że w wyniku słabego sprzężenia z otoczeniem, zredukowana dynamika układu może być modelowana za pomocą map Daviesa $D(t)$, czyli elementów pół-grupy Daviesa dla ustalonego czasu t . Całkowicie dodatnie i zachowujące ślad mapy Daviesa opisują proces Markowa i spełniają podstawowe wymagania termodynamiczne (w szczególności warunek szczegółowej równowagi (B.1.12)). Oznacza to między innymi, że dla długich czasów, układ w wyniku oddziaływania z otoczeniem dąży do stanu równowagi (Gibbsa):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} D(t)[\rho_0] = \frac{e^{-\beta H_S}}{\text{Tr}[e^{-\beta H_S}]}, \quad (4.1)$$

gdzie H_S to Hamiltonian swobodny układu oraz $\beta = T^{-1}$ (gdzie przyjęliśmy stałą Boltzmanna $k_B = 1$).

Dodatkowo w analizowanym przypadku, w którym zredukowana dynamika dotyczy układu o dwóch stanach, mapy Daviesa dają się w ogólności przedstawić w postaci parametrycznej, w których wyszczególniamy tylko parametr p (ściśle związany z temperaturę T otoczenia, zobacz (E.1.10)), oraz parametry związane z czasem relaksacji $A = 1/\tau_E$ i dekoherencji $G = 1/\tau_D$ (B.1.11). Rozważając typowy Hamiltonian swobodny $H_S = \frac{1}{2}\omega\sigma_z$, gdzie σ_z jest macierzą Pauliego (wzdłuż osi z) ze stanami własnymi $\sigma_z|0\rangle = |0\rangle$ oraz $\sigma_z|1\rangle = -|1\rangle$, możemy podać jawną postać działania mapy $D(p, A, G, \omega, t)$ na elementy bazowe rozpinające przestrzeń wszystkich operatorów liniowych (E.1.6-9). W tym podejściu dodatkowo zakłada się, że poza procesami dysypacji i dekoherencji, qubit także ewoluuje swobodnie w wyniku unitarnej ewolucji $U_t = e^{-iH_S t}$, dlatego mapa $D(p, A, G, \omega, t)$ zależy również od częstości własnej ω .

W prezentowanej publikacji jako przestrzeń \mathcal{H}_S została przyjęta albo dwuwymiarowa przestrzeń qubitów, albo czterowymiarowa przestrzeń dwóch qubitów. W pierwszym modelu pełna transformacja stanu qubitów S dana jest jako:

$$\Lambda(t)[\rho] = D(p, A, G, \omega, t)[\rho]. \quad (4.2)$$

W przypadku dwóch qubitów natomiast definiowana jest mapa w działaniu na stan separowalny:

$$\Lambda(t)[\rho_1 \otimes \rho_2] = D(p, A, G, \omega, t)[\rho_1] \otimes U_t \rho_2 U_t^\dagger. \quad (4.3)$$

Oznacza to, że w prezentowanym modelu tylko pierwszy qubit słabo oddziałuje z otoczeniem (i dodatkowo ulega unitarnej ewolucji swobodnej), natomiast drugi qubit jest od otoczenia izolowany i ewoluuje tylko unitarnie.

Ze względu na przybliżenie Markowa, opis korelacji w czasie zdecydowanie upraszcza się ze względu na możliwość zaniedbania splątania pomiędzy układem i otoczeniem (B.1.8). W tym ujęciu, aby obliczyć funkcję korelacyjną (3.6) wystarczy rozważyć tylko zredukowaną dynamikę układu S (B.1.7). Tym samym kwantowa relacja wyznaczająca dwuwymiarowe prawdopodobieństwo (3.4) sprowadza się do postaci (E.1.2):

$$p(q_i, t_i; q_j, t_j) = \text{Tr} \left(\Pi_{q_j} \Lambda(t_j - t_i) [\Pi_{q_i} \Lambda(t_i) [\rho(0)] \Pi_{q_i}] \right), \quad (4.4)$$

gdzie $\Lambda(t)$ to wspomniana wyżej całkowicie dodatnia i zachowująca ślad mapa (wynikająca ze zredukowanej dynamiki układu złożonego (E.1.5)).

Mierzona obserwabla i warunki początkowe

a) Pojedynczy qubit

Występujące w równaniu (4.4) operatory rzutowe Π_{\pm} , mierzonej obserwabli Q (3.2) działającej w przestrzeni \mathcal{H}_S dla pojedynczego qubit, przyjmuje się w postaci (E.1.14-15):

$$\begin{aligned}\Pi_+(\theta, \phi) &= |\psi(\theta, \phi)\rangle \langle \psi(\theta, \phi)|, \\ \Pi_-(\theta, \phi) &= I - \Pi_+(\theta, \phi),\end{aligned}\tag{4.5}$$

gdzie stan $|\psi(\theta, \phi)\rangle = \cos^2(\theta/2)|0\rangle + e^{i\phi}\sin^2(\theta/2)|1\rangle$ jest wektorem ze sfery Blocha. Stan początkowy w tym przypadku został zadany jako następująca macierz gęstości (E.1.16):

$$\rho(0) = \Pi_+(\pi/2, 0).\tag{4.6}$$

b) Podwójny qubit

W przypadku dwóch qubitów zostały rozważone trzy różne schematy pomiarowe. Aby przedstawić ich reprezentację w postaci operatorów rzutowych w pierwszej kolejności definiujemy stany Bella (E.1.20-21):

$$\begin{aligned}|\Phi_{\pm}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle), \\ |\Psi_{\pm}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle \pm |10\rangle).\end{aligned}\tag{4.7}$$

b1) Podwójny qubit (wariant pomiaru I)

W pierwszym wariantcie pomiarowym operatory rzutowania przyjmują postać (E.1.23-24):

$$\begin{aligned}\Pi_{\Phi+} &= |\Phi_+\rangle \langle \Phi_+|, \\ \Pi_{\Psi+} &= |\Psi_+\rangle \langle \Psi_+|,\end{aligned}\tag{4.8}$$

oraz

$$\begin{aligned}\Pi_{\Phi-} &= |\Phi_-\rangle \langle \Phi_-|, \\ \Pi_{\Psi-} &= |\Psi_-\rangle \langle \Psi_-|,\end{aligned}\tag{4.9}$$

który odpowiada zmodyfikowanemu pomiarowi w bazie Bella (B.1.23). Pomiar ten jest reprezentowany poprzez cztery jednowymiarowe operatory rzutowe, gdzie pierwsze dwa stany odpowiadają wartości zmierzonej $q = +1$, a kolejne dwa odpowiednio $q = -1$.

b2) Podwójny qubit (wariant pomiaru II)

W drugim schemacie operatory rzutowe przyjmują postać (E.1.26):

$$\begin{aligned}\Pi_+ &= |\Psi_+\rangle \langle \Psi_+|, \\ \Pi_- &= I - \Pi_+.\end{aligned}\tag{4.10}$$

Pomiar ten, jak wynika z powyższej konstrukcji, rozróżnia tylko jeden ze stanów Bella. Innymi słowy wynik pomiaru dostarcza informacji czy układ znajduje się w stanie $|\Psi_+\rangle$ lub w dowolnym innym, co oznacza, że w swojej istocie jest mniej „dokładny” niż pomiar *b1*).

b3) Podwójny qubit (wariant pomiaru III)

Trzeci scenariusz jest natomiast zdefiniowany poprzez operatory (E.1.28):

$$\begin{aligned}\Pi_+ &= |\Psi_+\rangle \langle \Psi_+| + |\Phi_+\rangle \langle \Phi_+|, \\ \Pi_- &= I - \Pi_+,\end{aligned}\tag{4.11}$$

który rozróżnia tylko pary stanów Bella, a więc można powiedzieć, że jest najmniej „dokładny” z pośród powyższych, co wynika z faktu, że obie podprzestrzenie rzutowe nie są jednowymiarowe.

We wszystkich trzech przypadkach (dla układu składającego się z dwóch qubitów) warunek początkowy przyjmuje się jako (E.1.22):

$$\rho(0) = |\Phi_+\rangle \langle \Phi_+|.\tag{4.12}$$

4.3 Wyniki

Podstawowym wynikiem otrzymanym w niniejszej pracy jest analityczna postać funkcji K_3 w zależności od wykonywanych pomiarów Π_{\pm} oraz warunków początkowych $\rho(0)$. Postać ta w pełni wyraża się tylko i wyłącznie poprzez interwał pomiędzy pomiarami τ oraz parametry otoczenia (T, τ_E i τ_D).

a) Pojedynczy qubit

W przypadku schematu pomiarowego dla pojedynczego qubitu jednym z najważniejszych wyników jest fakt, że korelator K_3 obliczony na podstawie funkcji korelacji (E.1.2), może w ogóle nie zależeć od pewnych własności otoczenia (przy odpowiednim doborze mierzonej obserwabli). W szczególności przyjmując w wyrażeniach (4.5) $\theta = \pi/2$ oraz $\phi = 0$ otrzymujemy K_3 w postaci (E.1.17):

$$K_3 = 2e^{-G\tau} \cos(\tau) - e^{-2G\tau} \cos(2\tau). \quad (4.13)$$

Oznacza to, że postać korelatora nie jest zależna od zmian temperatury T i parametru A (lub równoważnie czasu relaksacji τ_E). Jest to wynik zdecydowanie interesujący, który oznacza, że pomimo „wszechobecnego” oddziaływania układu z nieskończoną liczbą stopni swobody otoczenia, zawsze jesteśmy w stanie tak dobrać mierzone obserwabli (i ewentualnie stan początkowy), że korelator K_3 nie zależy w żaden sposób od np. średniej energii termicznej zawartej w termostacie. Oczywiście nadal ze względu na niezerową wartość τ_D nieklasyczne korelacje są sukcesywnie tłumione. Wykładnicze wyrazy występujące we wzorze (4.13) powodują, że łamanie nierówności $K_3 > 1$ jest obserwowane tylko i wyłącznie dla małych czasów τ (kiedy pomiary są wykonywane w krótkich odstępach od siebie), w przeciwieństwie do ewolucji układu swobodnego (2.15), w którym funkcja K_3 jest periodyczna (zobacz R.1.1).

Dla tego samego układu jeśli położymy $\theta = 0$ oraz $\phi = 0$, w definicji mierzonej obserwabli (4.5), otrzymamy odpowiednio:

$$K_3 = 1 - 4p(1 - p)(1 - e^{-A\tau})^2, \quad (4.14)$$

gdzie tym razem funkcja K_3 jest niezależna od parametru G , czyli procesu dekoherencji. W tym jednak przypadku nierówność LGI w całej domenie czasów τ nie jest nigdy łamana.

Sytuacja z wartościami pośrednimi $\theta \in (0, \pi/2)$ została przedstawiona graficznie na rysunku (R.1.2). Z analizy zachowania się funkcji w zależności od zmiany parametru θ , obserwujemy, że najbardziej optymalna wartość (prowadząca do największego łamania LGI) jest równa $\pi/2$, co jest także słuszne dla ewolucji układu izolowanego (unitarnej).

b) Podwójny qubit

Dla schematu pomiarowego *b1)* obserwabli skonstruowanej na podstawie rzutowania na

jeden z czterech stanów Bella, funkcja K_3 przyjmuje postać (E.1.25):

$$K_3 = \frac{1}{2}e^{-G\tau}\{1 + 3\cos(2\tau) - e^{-A\tau}[1 - \cos(2\tau)] - 2e^{-G\tau}\cos(4\tau)\}, \quad (4.15)$$

która w tym przypadku ponownie jest niezależna od temperatury otoczenia T . Na rysunku (R.1.4) została przedstawiona postać funkcji K_3 dla różnych wartości G i A . Na podstawie tej analizy można wyciągnąć wniosek, że łamanie nierówności LGI jest najbardziej efektywne kiedy $A = 2G$.

Dla pomiaru opisanego w punkcie b2) funkcja K_3 wyraża się natomiast następująco (E.1.27):

$$K_3 = \frac{1}{2}(1 - e^{-2A\tau}) + p(1-p)[(2 - e^{-A\tau})e^{-A\tau} - 1] + e^{-G\tau}(1 + e^{-A\tau}\cos(2\tau) - e^{-2G\tau}\cos(4\tau)). \quad (4.16)$$

Zależność od stałych A i G w tym przypadku jest podobna jak w schemacie powyższym. Tutaj obserwujemy jednak jawną zależność od temperatury (zawartą w parametrze p). Ta zależność od temperatury, która wpływa destruktywnie na łamanie nierówności LGI, ujawnia się jako skutek gorszego rozróżnienia pomiędzy stanami Bella. Jednakże w ostatnim z zaproponowanych pomiarów b3), który rozróżnia tylko pomiędzy parami stanów Bella, niezależność funkcyjna korelatora od temperatury zostaje ponownie odtworzona (E.1.29). Ten ciekawy efekt – zależności i niezależności korelatora od temperatury – jest wynikiem zasobu informacji jaka jest pozyskiwana podczas pomiaru.

4.4 Podsumowanie

Wyniki badań uzyskane dla powyższego modelu qubitów i układu dwóch qubitów sprzężonych z otoczeniem pokazują, że postać funkcji K_3 może zdecydowanie zmieniać swój charakter w zależności od wyboru bazy pomiarowej. W kontekście powyższej analizy interesujący jest wpływ otoczenia na łamanie nierówności LGI. Przykładowo otrzymane wyniki mogą posłużyć do eksperymentalnej weryfikacji testów LGI poprzez odpowiednie zaprojektowanie schematu pomiarowego w czasie, tak aby zminimalizować niekorzystny wpływ otoczenia. Ponadto zdecydowana zmiana charakteru korelatora K_3 od wybranej bazy pomiarowej jest w stanie bardzo dobrze scharakteryzować otoczenie samo w sobie, głównie ze względu na fakt, że różne schematy pomiarowe ujawniają jego inne cechy.

Leggett-Garg inequality for qubits coupled to thermal environment

Marcin Łobejko

Institute of Physics, University of Silesia, 40-007 Katowice, Poland

Jerzy Łuczka and Jerzy Dajka*

Institute of Physics, University of Silesia, 40-007 Katowice, Poland

and Silesian Center for Education and Interdisciplinary Research, University of Silesia, 41-500 Chorzów, Poland

(Received 15 January 2015; published 13 April 2015)

We study violation of the Leggett-Garg inequality for the correlator K_3 in two cases: (i) for a qubit weakly coupled to a thermal decohering (dissipative and/or dephasing) environment and (ii) for a pair of qubits with only one of them coupled to the environment. In the case of a single qubit, we identify conditions depending both on initial state preparation and a measurement protocol when violation of the K_3 inequality becomes dependent only on dephasing and independent of dissipation and temperature. In the case of two qubits, we have found the temperature-independent regime as well as the regime where all three components of the decoherence can control violation of the Leggett-Garg inequality.

DOI: [10.1103/PhysRevA.91.042113](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.91.042113)

PACS number(s): 03.65.Ud, 03.67.-a, 03.65.Yz, 03.65.Ta

I. INTRODUCTION

Quantum correlations in a space such as entanglement [1] or quantum discord [2] have attracted researchers from diverse branches of science, starting from philosophy via mathematics and physics up to nanoengineering. Such correlations are fascinating, counterintuitive, important for the foundations of our understanding of reality, and, last but not least, known as a useful resource for quantum information. One of the first and most promising methods for entanglement detection [3] is related to violation of various forms of Bell inequalities [4].

Recently quantum correlations *in time* have been recognized to be at least as interesting as these in a space [5]. The existence of nonclassical correlations between outcomes of measurements carried out at different time instants is indicated by violation of Leggett-Garg inequalities (LGIs). Violation of LGIs and the Bell scenario, formally unified in Ref. [6], is a symptom of quantum nonlocality in time (macroscopic realism for the Leggett-Garg scenario) or in a space (for the Bell scenario). Reference [5] can be recommended as an up-to-date review of both basic theoretical and experimental achievements.

The simplest LGI

$$K_3 = C_{21} + C_{32} - C_{31} \leq 1 \quad (1)$$

is composed of correlation functions $C_{ji} = \langle Q(t_j)Q(t_i) \rangle$ of a dichotomous observable $Q(t) = \pm 1$ calculated at three different time instants $t_3 > t_2 > t_1$. Experimental testing of LGIs and search for their possible violation is a subtle problem due to the required noninvasiveness of measurement of the quantity Q [5] and the “macroscopicity” of quantum states. The second requirement is often abandoned as LGIs are interesting on their own also in microscopic systems [7]. Despite conceptual difficulties related to the “clumsiness loophole” [5], experimentalists are faced with a more trivial problem: decoherence. One expects that similarly to the entanglement in a space, entanglement in time is also destroyed by an environment due to unavoidable information leakage. This behavior is

generic although there are spectacular exceptions leading to decoherence-free time evolution of quantum systems. Recent studies [8] show a nontrivial role played by decoherence for the LGI violation.

We consider a special class of measurements, namely, the projective measurements and the dichotomous observable Q , which is the difference between two projection operators onto the subspace corresponding to $Q = +1$ and one onto $Q = -1$. Calculation of the correlation functions C_{ji} for arbitrary quantum dynamics (including non-Markovian evolution of open quantum systems) requires approximate methods. The exception is pure dephasing [9,10]. The case of strictly Markovian evolution of an open quantum system is simpler because the correlation functions $C_{ji} = \langle Q(t_j)Q(t_i) \rangle$ are stationary, i.e., depend only on the time difference $t_j - t_i$. Moreover, in Markovian approximation one can neglect entanglement between the open system and its environment which simplifies calculations of K_3 [8]. If a quantum system prepared at time s in a state $\rho(s)$ evolves according to a Markovian dynamical map $\Lambda(t-s)\rho(s) = \rho(t)$ for $t > s$, the correlation functions in (1) can be calculated from the expression [7]:

$$C_{ji} = \sum_{l,m} q_m q_l \text{Tr} \{ \Pi_m \Lambda(t_j - t_i) [\Pi_l \Lambda(t_i) \rho(0) \Pi_l] \}, \quad (2)$$

where $t_j > t_i > 0$ and $q_{l,m} = \pm 1$ represent the measurement outcomes associated with the projection operators $\Pi_{l,m}$.

In this paper, we analyze the LGIs for a single qubit and a pair of qubits weakly interacting with a thermal environment. We model quantum evolution of an open system in terms of Davies maps [11]. The Davies maps depend on three parameters: the energy relaxation time τ_E , the dephasing time τ_D , and the temperature T of the outer environment. We study how violation of (1) is affected by the presence of a thermal reservoir and show that there are conditions when the quantity K_3 in Eq. (1) remains unaffected by some of the parameters governing the time evolution of the qubits. These conditions are related both to the initial preparation of the open system and to the specific form of the measured quantity Q . In the case of a single qubit (discussed in Sec. III) we consider a family of measurement projectors indicating a

*jerzy.dajka@us.edu.pl

one-dimensional subspace in the state space of the qubit. We show that the function K_3 can be independent of both the energy dissipation and the temperature of the environment. In the case of two qubits, when only one of them is coupled to the environment, we consider (in Sec. IV) three measurements differing in the number of projectors and the dimensionality of their range. For two of those settings it is possible to obtain a temperature-independent correlator K_3 . We conclude and summarize the paper in Sec. V.

II. THERMAL ENVIRONMENT

The natural source of decoherence of a quantum system S is its environment E . The influence of the environment E can be modeled by the reduced dynamics of the system S . In the standard approach, one considers the system $S + E$ to be closed, and its unitary dynamics is determined by the Hamiltonian of the total system:

$$H = H_S + H_E + H_{\text{int}} \quad (3)$$

where H_S is the Hamiltonian of the system S , H_E is the Hamiltonian of the environment E , and H_{int} describes the system-environment interaction. We assume that the system S is a qubit:

$$H_S = \frac{\omega}{2}(|1\rangle\langle 1| - |0\rangle\langle 0|), \quad (4)$$

where ω is the energy splitting of the qubit. If the initial density operator of the total system $S + E$ is $\varrho = \varrho_{SE}(0)$ then the state $\rho(t)$ of the system S at time $t > 0$ is determined by the reduced dynamics

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \text{Tr}_E\{\varrho_{SE}(t)\} = \text{Tr}_E\{U(t) \varrho_{SE}(0) U^\dagger(t)\}, \\ U(t) &= \exp[-iHt/\hbar]. \end{aligned} \quad (5)$$

There are only a few models of (3) for which the reduced dynamics (5) can be exactly calculated. Here, instead of using a general scenario, we assume that the interaction between the qubit and its environment is weak and the reduced dynamics can be modeled by a Davies map [11]. It describes a Markovian process and satisfies most of the desired thermodynamic and statistical-mechanical properties such as the detailed balance condition [12]. Davies maps have been successfully used in recent studies of various problems in quantum information and the physics of open quantum systems including teleportation [13], entanglement dynamics [14], quantum discord [15,16], or properties of geometric phases of qubits [17] and thermodynamic properties of nanosystems [18].

The Davies map $D = D(p, A, G, \omega, t)$ is defined by the relations [11]

$$\begin{aligned} D|1\rangle\langle 1| &= [1 - (1 - p)(1 - e^{-At})]|1\rangle\langle 1| \\ &\quad + (1 - p)(1 - e^{-At})|0\rangle\langle 0|, \end{aligned} \quad (6)$$

$$D|1\rangle\langle 0| = e^{i\omega t - Gt}|1\rangle\langle 0|, \quad (7)$$

$$D|0\rangle\langle 1| = e^{-i\omega t - Gt}|0\rangle\langle 1|, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} D|0\rangle\langle 0| &= p(1 - e^{-At})|1\rangle\langle 1| \\ &\quad + [1 - (1 - e^{-At})p]|0\rangle\langle 0|, \end{aligned} \quad (9)$$

where $p \in [0, 1/2]$ is related to the temperature T (here we set the Boltzmann constant $k_B = 1$) via

$$p = \exp(-\omega/2T) / [\exp(-\omega/2T) + \exp(\omega/2T)]. \quad (10)$$

The parameters $A = 1/\tau_E$ and $G = 1/\tau_D$ are related to the energy relaxation time τ_E and the dephasing time τ_D , respectively [11]. The inequalities [19]

$$G \geq A/2 \geq 0 \quad (11)$$

guarantee that the Davies map is a trace-preserving completely positive map.

In the long-time limit, the Davies map transforms any qubit state ρ into the equilibrium Gibbs state:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} D(p, A, G, \omega, t) \rho = p|1\rangle\langle 1| + (1 - p)|0\rangle\langle 0|, \quad (12)$$

which allows recovery of the predictions of equilibrium models of statistical physics and thermodynamics. In addition to zero temperature ($p = 0$) there are two other natural limits of the Davies map. The first is pure dephasing (without dissipation of energy) obtained in the limit $A \rightarrow 0$ for $G \neq 0$. The second is the unitary dynamics when in addition we allow $G \rightarrow 0$. In other words

$$U(\omega, t) = \lim_{G \rightarrow 0} \lim_{A \rightarrow 0} D(0, A, G, \omega, t). \quad (13)$$

Let us be aware that the ordering of limits leading to the unitary map U in Eq. (13) is not arbitrary due to the constraint (11).

III. LEGGET-GARG INEQUALITY FOR A SINGLE QUBIT

In this section we discuss the influence of the thermal environment on an archetypal problem studied in the context of LGIs: a single qubit [5]. For convenience, we assume that $\omega = 1$. Let us consider a single dichotomous observable Q determined by one-dimensional projectors:

$$\Pi_{+1} = |\psi(\theta, \varphi)\rangle\langle\psi(\theta, \varphi)|, \quad (14)$$

$$\Pi_{-1} = \mathbb{1}_{2 \times 2} - \Pi_{+1}, \quad (15)$$

where the subscripts ± 1 denote assigned values $q_{\pm} = \pm 1$ corresponding to the projectors $\Pi_{\pm 1}$. The state $|\psi(\theta, \varphi)\rangle = \cos(\theta/2)|0\rangle + \sin(\theta/2)e^{i\varphi}|1\rangle$, $\theta \in [0, \pi]$, and $\varphi \in [0, 2\pi]$. In particular $|\psi(\pi/2, 0)\rangle \equiv |+\rangle$ is an eigenstate of the spin's x component. We assume that initially the qubit is prepared in the state

$$\rho(0) = |+\rangle\langle +|. \quad (16)$$

Instead of studying the general case, which makes it slightly cumbersome to present explicit formulas, let us take $\theta = \pi/2$ and $\varphi = 0$ in Eq. (14), which corresponds to projective measurements on the initial state. We apply Eq. (2) to calculate the function K_3 in Eq. (1) for fixed intermeasurement time intervals τ (i.e., $t_3 - t_2 = t_2 - t_1 = \tau$). It takes a simple form, namely,

$$K_3 = 2e^{-\tau G} \cos(\tau) - e^{-2\tau G} \cos(2\tau). \quad (17)$$

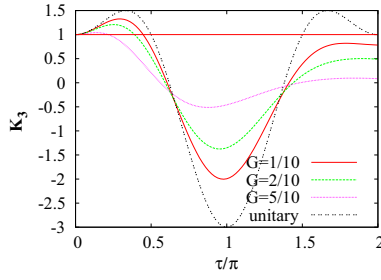


FIG. 1. (Color online) The Leggett-Garg correlator K_3 given by Eq. (17) versus the intermeasurement time interval τ for different values of the dephasing parameter G . The projector operators $\Pi_{\pm 1}$ in Eq. (14) are fixed for $\theta = \pi/2$ and $\varphi = 0$.

Let us observe that this function depends only on the parameter G , i.e., on the dephasing relaxation time τ_D . It does not depend on temperature T and the energy dissipation characterized by the relaxation time $A = 1/\tau_E$. The reason is that the initial state $\rho(0)$ is the eigenstate of the spin's x component and the projective measurement is on the same state. In consequence not only the correlation function C_{ij} in (2) but also the expression $\text{Tr}\{\Pi_m \Lambda(t_j - t_i) [\Pi_l \Lambda(t_i) \rho(0) \Pi_l]\}$ under the sum depends only on the dephasing G and does not depend on the dissipation $\{A, p\}$. It is similar to the case of a nonunitary channel considered in Sec. V A in Ref [8], where it is shown that for some initial states, the nonunitary results are independent of the parameters characterizing this channel. The possibility of making the function K_3 explicitly independent of both temperature T and dissipation A makes the above setting experimentally favorable. In the case when $G = 0$, the function K_3 reduces to the correlator for the unitary evolution [20,21],

$$K_3 = 2 \cos(\tau) - \cos(2\tau). \quad (18)$$

In Fig. 1 we visualize the role of the environment. While K_3 in (18) is a time-periodic function, the function K_3 in (17) represents damped oscillations. In consequence, violation of the LGIs for unitary evolution can be observed for infinitely many τ intervals between successive measurement times (because the qubit evolution is periodic in time). For the qubit interacting with its environment, the number of τ intervals is reduced as G grows. For values of G as shown in Fig. 1, LGI violation can be detected only when the interval between successive measurement times is restricted to small values ($0, \tau_c$) and the time τ_c is smaller and smaller as the dephasing time τ_D gets shorter and shorter. This is because for times smaller than the dephasing time, the qubit behaves as an isolated quantum system and therefore the LGI is violated. For longer times, the qubit-environment interaction destroys quantumness (superposition of states) of the system, which starts to behave more classically, and then the LGI is satisfied.

It is possible to obtain a K_3 which is G independent. It happens for the case of the measurement with $\theta = \varphi = 0$ in Eq. (14) and then

$$K_3 = 1 - 4p(1-p)(1 - e^{-A\tau})^2. \quad (19)$$

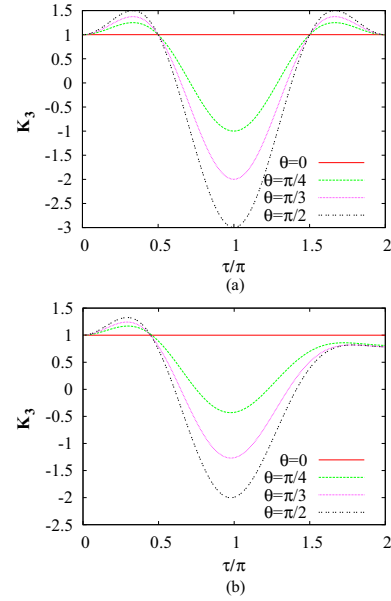


FIG. 2. (Color online) The Leggett-Garg correlator K_3 versus intermeasurement time interval τ for different measurements $\Pi_{\pm 1}$ in Eq. (14) parametrized by different values of θ and fixed $\varphi = 0$. (a) The case of unitary evolution U . (b) The system evolves under the Davies map with $A = G = 1/10$ and $p = 0$.

However, in this case the LGI is never violated. The reason is not obvious: (i) Note that the case $\theta = \varphi = 0$ corresponds to the eigenstate of the qubit z component which is the eigenvector of the Hamiltonian H_S [20]. (ii) Because (19) depends on A and p , dissipation transforms the quantum state into a classical mixture. In Ref. [8], the two-channel unitary case shows a threshold behavior, such that no violations occur if the maximum dephasing parameter is less than some critical value. This allows one to rule out violations of the LGIs for a large class of environments.

For other values of parameters, the function K_3 is complicated and we do not present its analytic form. Instead, in Fig. 2 we depict how the function K_3 changes when θ is varied. As one can expect the choice $\theta = \pi/2$ is “optimal.” The optimal character of the $\theta = \pi/2$ measurement is confirmed in both the unitary limit as depicted in Fig. 2(a) and for the Davies evolution as shown in Fig. 2(b).

In the general case, the function K_3 depends on all three parameters of the Davies map and two parameters defining the qubit state and projectors. Their influence on violation of the LGI is depicted in Fig. 3. We can conclude that violation of the LGI is more sensitive to change of the dephasing time $\tau_D = 1/G$. The correlator K_3 is more robust to variation of the energy dissipation time $\tau_e = 1/A$ and temperature T . The careful inspection of the insets in Fig. 3 reveals that increase of G makes the τ interval smaller where the LGI is violated while variation of A has the opposite effect: when A grows, the τ interval for LGI violation is larger. Remember that A

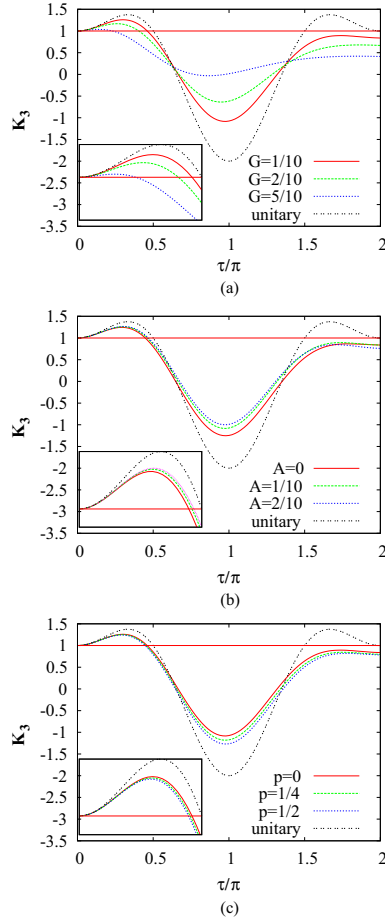


FIG. 3. (Color online) The Leggett-Garg correlator K_3 versus intermeasurement time interval τ for the measurement $\Pi_{\pm 1}$ in Eq. (14) with $\theta = \pi/3$ and $\varphi = 0$. (a) Different values of G and fixed $A = 1/10$ and $p = 0$. (b) Different values of A and fixed $G = 1/10$ and $p = 0$. (c) Different values of p and fixed $A = G = 1/10$. The insets show K_3 for small values of $\tau \leq \pi/2$.

cannot grow arbitrarily large because for a fixed value of G the inequality (11) has to be satisfied. When the temperature increases, i.e., when the parameter p grows, the interval of τ for violation of the LGI decreases. It is depicted in the inset in Fig. 3(c).

IV. LEGGET-GARG INEQUALITY FOR TWO QUBITS

The projective measurements which can be carried out on a single qubit are quite simple. Unless they are trivial (given by the identity $\mathbb{1}_{2 \times 2}$), they correspond to one-dimensional projectors such as those in Eq. (14). In the case of more than two qubits the situation becomes more complex. Here we consider a system of two qubits of the same energy

splitting $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ [cf. Eq. (3)] and prepared in one of the maximally entangled pure Bell states:

$$|\Phi_{\pm}\rangle = [|00\rangle \pm |11\rangle]/\sqrt{2}, \quad (20)$$

$$|\Psi_{\pm}\rangle = [|01\rangle \pm |10\rangle]/\sqrt{2}. \quad (21)$$

We assume that only one qubit is coupled to an environment. This means that the pair of qubits evolves according to the product of maps $D(p, A, G, \omega, t) \otimes U(\omega, t)$, i.e., one of two qubits, which is in contact with thermal environment, evolves via the Davies map (6)–(9), whereas the second qubit remains separated from its surroundings and its evolution is unitary and determined by the Hamiltonian (4). When parties of a composite two-qubit system undergo different evolutions, asymmetric time evolution occurs; e.g., when the qubits composing a pair are separated in space and the conditions of their evolution are different. Nowadays quantum entanglement can be maintained over spectacularly large distances [22]. We consider here for simplicity a limiting case as we assume that one can neglect the effect of the environment on the properties of one of the qubits belonging to an entangled pair. In all cases considered below, we assume that the initial state of the system has the form

$$\rho(0) = |\Phi_{\pm}\rangle\langle\Phi_{\pm}|. \quad (22)$$

Probably the most natural “first-choice experiment” which can be carried out on a pair of qubits is the celebrated Bell state measurement (BSM) [23]. Here we consider a modified version of the BSM. It consists of four one-dimensional projectors

$$\Pi_{\Phi_{+}} = |\Phi_{+}\rangle\langle\Phi_{+}|, \quad (23)$$

$$\Pi_{\Psi_{+}} = |\Psi_{+}\rangle\langle\Psi_{+}|,$$

with the measurement value $q = +1$, and

$$\Pi_{\Phi_{-}} = |\Phi_{-}\rangle\langle\Phi_{-}|, \quad (24)$$

$$\Pi_{\Psi_{-}} = |\Psi_{-}\rangle\langle\Psi_{-}|,$$

corresponding to the outcome $q = -1$. The modification is introduced to obtain dichotomous observables suitable for studying violation of the LGI (1). The modified BSM has a clear interpretation as the limited ability to distinguish among four Bell states. In other words, a measuring device cannot differentiate between, e.g., $|\Phi_{-}\rangle$ and $|\Psi_{-}\rangle$, as the corresponding measurement output is in that case identical. Now, considering measurements equally separated in time ($t_3 - t_2 = t_2 - t_1 = \tau$), we obtain the correlator K_3 in the form

$$K_3 = \frac{1}{2}e^{-G\tau}\{1 + 3\cos(2\tau) - e^{-A\tau}[1 - \cos(2\tau)] - 2e^{-G\tau}\cos(4\tau)\}. \quad (25)$$

Let us notice that despite explicit dependence on both A and G , the function K_3 in Eq. (25) does not depend on p , i.e., possible violation of the LGI is temperature independent. In Fig. 4(a) we show how increase of G affects violation of the LGI: increase of G makes violation of LGIs more restricted. At the same time, from the results in Fig. 4(b) one can infer that the pure dephasing limit $A = 0$ is not best for

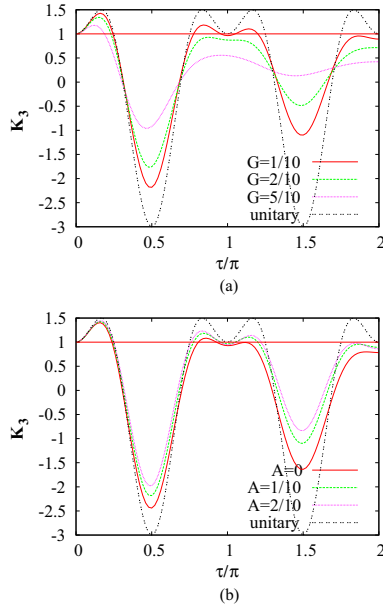


FIG. 4. (Color online) The Leggett-Garg correlator K_3 in Eq. (25) for a pair of qubits, one of which undergoes Davies evolution whereas the second evolves unitarily for the BSM measurement (23), versus intermeasurement time interval τ . (a) For different G and $A = 1/10$. (b) For different A and $G = 1/10$.

preserving LG violation in the presence of the environment. We conclude that the strongest violation takes place for $A = 2G$, i.e., counterintuitively violation of the LGIs is stabilized by energy dissipation. These features of K_3 are similar to those presented in Figs. 3(a) and 3(b) for a single qubit.

Now, let us assume that by the measurement we can recognize only one of four Bell states such that the measurement projectors are

$$\begin{aligned}\Pi_{+1} &= |\Psi_+\rangle\langle\Psi_+|, \\ \Pi_{-1} &= \mathbb{1}_{4\times 4} - \Pi_{+1},\end{aligned}\quad (26)$$

where the subscripts ± 1 denote measurement values corresponding to the projectors. In this case, the function K_3 has the form

$$K_3 = \frac{1}{2}(1 - e^{-2A\tau}) + p(1 - p)[(2 - e^{-A\tau})e^{-A\tau} - 1] + e^{-G\tau}(1 + e^{-A\tau})\cos(2\tau) - e^{-2G\tau}\cos(4\tau). \quad (27)$$

The dependence of K_3 on both G and A is qualitatively similar to that in the case of full BSM and the corresponding function K_3 in Eq. (25). However, let us notice the explicit p dependence of the formula (27). It is an essentially different feature resulting from the different type of measurement carried out on the system. As one might expect the increase of temperature results in weakening of the LG violation. It is a similar effect as is presented for a single qubit in Fig. 3(c).

In contrast to the BSM for the measurement given by Eq. (26) one can recognize only one among four Bell states. Another type of measurement is even “less precise” when none of the projectors is one dimensional. Let us consider a measurement allowing us to identify whether the measured system is in a subspace of the state space spanned by a pair of Bell states. Such a measurement is given by two two-dimensional projectors:

$$\begin{aligned}\Pi_{+1} &= |\Psi_+\rangle\langle\Psi_+| + |\Phi_+\rangle\langle\Phi_+|, \\ \Pi_{-1} &= \mathbb{1}_{4\times 4} - \Pi_{+1},\end{aligned}\quad (28)$$

with the subscripts ± 1 again denoting measurement values. Let us stress that despite similarities, the measurement described by Eq. (28) is different in comparison to the modified BSM in Eqs. (23) and (24). This difference is clearly visible in the function K_3 , which now reads

$$K_3 = \frac{1}{2}e^{-G\tau}[1 - e^{-A\tau} + (3 + e^{-A\tau})\cos(2\tau) - 2e^{-G\tau}\cos(4\tau)]. \quad (29)$$

The A and G dependence is qualitatively similar to that which we observe for K_3 in Eqs. (25) and (27). In particular the setting $A = 2G$ is “best” for LGI violation.

V. SUMMARY

Testing the Leggett-Garg inequalities and their violations is a promising tool for studying most fundamental properties of Nature. Violation of the inequality (1) indicates that (macroscopic) realism possibly fails [5]. In our work we analyze the influence of the environment on properties of the correlation function K_3 . We study the effects of the thermal environment in terms of the Davies method, which rigorously covers quantum systems weakly coupled to the environment. We show that for a single qubit it is possible to obtain a function K_3 which is independent of both the energy dissipation given by the parameter A in Eq. (6) and the temperature T of the environment (10). This is allowed provided that the measurement is given by a projector on the subspace spanned by eigenstates of the x component of the spin operator. We also considered a pair of qubits, prepared in maximally entangled pure Bell states, only one of them coupled weakly to the environment. We have shown that for two of three studied measurements one can obtain a temperature-independent function K_3 . Moreover, the violation of the LGIs is least affected by dephasing and energy relaxation satisfying $A = 2G$.

Physicists put in a lot of effort to prove that reality is not really realistic. Local realism has been disproved by violated Bell inequalities. It is (probably) also the case for macroscopic realism. We hope that our work can serve as a guideline for experimentalists who investigate violation of the Leggett-Garg inequalities in order to disprove this latter type of realism also.

ACKNOWLEDGMENTS

The work has been supported by the NCN Project No. DEC-2013/09/B/ST3/01659 (J.D.) and the Forszt Project cofinanced by EU from the European Social Fund (M.L.).

- [1] R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki, and K. Horodecki, *Rev. Mod. Phys.* **81**, 865 (2009).
- [2] K. Modi, A. Brodutch, H. Cable, T. Paterek, and V. Vedral, *Rev. Mod. Phys.* **84**, 1655 (2012).
- [3] O. Gühne and G. Tóth, *Phys. Rep.* **474**, 1 (2009).
- [4] N. Brunner, D. Cavalcanti, S. Pironio, V. Scarani, and S. Wehner, *Rev. Mod. Phys.* **86**, 419 (2014).
- [5] C. Emary, N. Lambert, and F. Nori, *Rep. Prog. Phys.* **77**, 016001 (2014).
- [6] M. Markiewicz, P. Kurzyński, J. Thompson, S.-Y. Lee, A. Soeda, T. Paterek, and D. Kaszlikowski, *Phys. Rev. A* **89**, 042109 (2014).
- [7] C. Budroni and C. Emary, *Phys. Rev. Lett.* **113**, 050401 (2014).
- [8] C. Emary, *Phys. Rev. A* **87**, 032106 (2013).
- [9] J. Łuczka, *Physica A* **167**, 919 (1990).
- [10] P.-W. Chen and M. M. Ali, *Sci. Rep.* **4**, 6165 (2014).
- [11] W. Roga, M. Fannes, and K. Życzkowski, *Rep. Math. Phys.* **66**, 311 (2010).
- [12] R. Alicki and K. Lendi, *Quantum Dynamical Semigroups and Applications*, Lecture Notes in Physics Vol. 717 (Springer, Berlin, 2007).
- [13] D. Kłoda and J. Dajka, *Quant. Inf. Proc.* **14**, 135 (2015).
- [14] K. Lendi and A. J. v. Wonderen, *J. Phys. A: Math. Theor.* **40**, 279 (2007).
- [15] J. Dajka, M. Mierzejewski, J. Łuczka, R. Blattmann, and P. Hänggi, *J. Phys. A: Math. Theor.* **45**, 485306 (2012).
- [16] J. Dajka and J. Łuczka, *Phys. Rev. A* **87**, 022301 (2013).
- [17] J. Dajka, J. Łuczka, and P. Hänggi, *Quantum Inf. Process.* **10**, 85 (2011).
- [18] M. Szełąg, J. Dajka, E. Zipper, and J. Łuczka, *Acta Phys. Pol. B* **39**, 1177 (2008).
- [19] M. H. Levitt, *Spin Dynamics: Basics of Nuclear Magnetic Resonance* (Wiley, New York, 2008).
- [20] J. Kofler and C. Brukner, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 090403 (2008).
- [21] V. Athalye, S. S. Roy, and T. S. Mahesh, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 130402 (2011).
- [22] T. Herbst, T. Scheidl, M. Fink, J. Handsteiner, B. Wittmann, R. Ursin, and A. Zeilinger, [arXiv:1403.0009](https://arxiv.org/abs/1403.0009).
- [23] J.-W. Pan, Z.-B. Chen, C.-Y. Lu, H. Weinfurter, A. Zeilinger, and M. Żukowski, *Rev. Mod. Phys.* **84**, 777 (2012).

Rozdział 5

(A.2) Łamanie nierówności w obecności białego szumu

5.1 Wstęp

W drugim modelu badań nad łamaniem nierówności Leggetta–Garga dla układów otwartych jest układ podlegający losowej perturbacji modelowanej za pomocą klasycznego białego szumu gaussowskiego. Dynamika układu reprezentowana jest poprzez algebrę operatorów momentu pędu o całkowitej wartości j , która fizycznie odpowiada np. dynamice momentów magnetycznych w zewnętrznym polu. Badania obejmują model sprzężenia podłużnego i poprzecznego. Głównym celem badawczym jest określenie wpływu szumu na nieklasyczne korelacje w czasie obecne w układzie w zależności od rozmiaru układu j . Dodatkowo w modelowaniu rozważono wpływ specjalnego skalowania wyrazów Hamiltonianu, który zapewnia dla j dążącym do nieskończoności istnienie granicy klasycznej. Tego typu model semi-klasyczny (po raz pierwszy zaproponowany w ostatnim z omawianych artykułów, zobacz Rozdział 7) jest szczególnie interesujący z punktu widzenia analizy makrorealizmu.

Jednym z głównych otrzymanych wyników jest ścisła analityczna postać korelatora K_3 w przypadku sprzężenia podłużnego dla dowolnej wartości j . Wynik ten został otrzymany za pomocą wprowadzenia do opisu metody bazującej na dwuwymiarowej niezmienniczej podprzestrzeni Hilberta. Dla sprzężenia podłużnego wykonano natomiast obliczenia funkcji K_3 w sposób numeryczny. Przypadek ten pokazuje nieintuicyjne zachowanie, w którym układ semi-klasyczny (dla dużych wartości j) wykazuje większe łamanie LGI niż w obszarze typowo kwantowym (dla małych wartości j).

Biały szum wykorzystany w niniejszym formalizmie teoretycznym jest skutecznym narzędziem do modelowania losowej dynamiki w wyniku sprzężenia układu np. ze stopniami swobody otoczenia termicznego. Idea kryjąca się za zastosowaniem białego szumu do badania nieklasycznych korelacji w czasie jest podobna do modelu poprzedniego (A.1), przy czym sposób modelowania otoczenia termicznego jest zdecydowanie różny, co zostanie szerzej przedyskutowane w paragrafie poniżej.

5.2 Model

Sprzężenie z otoczeniem

Dynamika analizowanego układu kwantowego wyraża się poprzez Hamiltonian:

$$H = \hbar\omega_0 J_z + \hbar\lambda_0 \tilde{\xi}(t)V, \quad V = J_x, J_z, \quad (5.1)$$

gdzie J_i (dla $i = x, y, z$) to operator momentu pędu, λ i ω to odpowiednio parametry opisujące stałą sprzężenia i energię własną układu oraz $\tilde{\xi}(t)$ to klasyczny stochastyczny szum. Powyższy Hamiltonian opisuje typowy kwantowy układ, którego dynamika oparta jest na algebrze operatorów momentu pędu. Tego typu układy są szeroko stosowane w wielu dziedzinach fizyki tj. fizyka matematyczna (B.2.31), kwantowym chaosie (B.2.17), czy sieciach kwantowych (B.2.25).

Ponadto w analizie zaproponowano specjalne skalowanie Hamiltonianu (E.2.3):

$$H \rightarrow \frac{H}{j} = \hbar\omega_0 \frac{J_z}{j} + \hbar\lambda_0 \tilde{\xi}(t) \frac{V}{j}, \quad (5.2)$$

gdzie j jest związany z wartościami własnymi operatora $\sum_i J_i^2$, które wynoszą odpowiednio $\hbar j(j+1)$. Tego typu szczególne skalowanie $1/j$ operatorów J_i zapewnia istnienie granicy klasycznej (B.2.17,33). Podejście to definiowane jest poprzez układ modelowany w pełni kwantowo-mechanicznie, który jednocześnie jest zbieżny do układu klasycznego w granicy gdy j dąży do nieskończoności, co w niniejszej pracy jest określane jako przybliżenie semi-klasyczne. Przybliżenie to jest w szczególności wykorzystywane w metodach stosowanych w dziedzinie kwantowego chaosu (B.2.17).

Dyskutowane dwa typy sprzężenia $V = J_z, J_x$ odpowiadają dwóm całkowicie różnym fizycznym procesom. Sprzężenie podłużne J_z jest przykładem modelu czystej dekoherencji (B.2.4,22), który nie zmienia wartości oczekiwanej $\langle J_z \rangle$. Natomiast oddziaływanie poprzeczne J_x może być utożsamione z procesami „tunelowania”.

W proponowanym modelu założono, że $\tilde{\xi}(t)$ odnosi się do białego szumu gaussowskiego, który charakteryzuje się poprzez relacje (E.2.6,7):

$$\begin{aligned}\langle \tilde{\xi}(t) \rangle &= 0, \\ \langle \tilde{\xi}(t), \tilde{\xi}(s) \rangle &= 2D_0 \delta(t - s),\end{aligned}\tag{5.3}$$

gdzie $\langle \cdot \rangle$ oznacza uśrednianie po wszystkich realizacjach procesu stochastycznego $\tilde{\xi}(t)$ (B.2.14) oraz parametr D_0 określa intensywność szumu.

W niniejszej pracy rozumienie powyższego modelu jako „układu otwartego” wymaga wyjaśnienia. W typowych układach otwartych przestrzeń stanów właściwego układu \mathcal{H}_S jest rozszerzona o dodatkowe stopnie swobody otoczenia należące do przestrzeni \mathcal{H}_E , a następnie globalna dynamika zostaje uśredniana po tych drugich. W przeciwieństwie do tego podejścia, dla powyższego modelu wpływ zewnętrznego otoczenia uwzględniony jest w postaci zmiennej w czasie perturbacji, a nie dodatkowej przestrzeni \mathcal{H}_E . Analogia do układu otwartego jest natomiast całkowicie zachowana, jako że w tym przypadku zależny od czasu stan układu $\varrho(t)$ jest również uśredniany po wszystkich realizacjach szumu $\tilde{\xi}(t)$ (traktowanego jako nieznane stopnie swobody otoczenia):

$$\rho(t) = \langle \varrho(t) \rangle .\tag{5.4}$$

Dynamika (uśrednionego) operatora gęstości $\varrho(t)$ jest w tym przypadku dana równaniem master (B.2.23,24):

$$\frac{d}{ds} \rho(s) = -\frac{i}{j} [J_z, \rho(s)] - \frac{D}{j^2} [V, [V, \rho(s)]],\tag{5.5}$$

które zostało przeskalowane do postaci bezwymiarowej, tak że $s = \omega_0 t$ i $D = \lambda_0^2 D_0 / \omega_0$. Powyższe równanie jest przykładem równania Lindblada (B.2.2). Należy podkreślić, że równanie o tej samej postaci pojawia się również w innych fizycznych modelach, takich jak ciągły pomiar momentu pędu (B.2.32) lub w wyniku dokładnego rozwiązania zredukowanej dynamiki cząstki o spinie $1/2$ w kontakcie z bozonowym termostatem (B.2.22). Aby odtworzyć dynamikę generowaną przez Hamiltonian bez skalowania $1/j$ (5.1) wystarczy w rozwiązaniu równania (5.5) dokonać transformacji $s \rightarrow js$ oraz $D \rightarrow jD$.

Mierzona obserwabla i warunki początkowe

W celu reprezentacji mierzonej obserwabli w zaproponowanym modelu łamania LGI zdefiniowano stany (E.2.14-15):

$$|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|j, j\rangle \pm |j, -j\rangle), \quad (5.6)$$

gdzie $|j, m\rangle$ to odpowiednio stan własny operatora J_z o wartości własnej m . Zauważmy, że taka definicja implikuje:

$$\begin{aligned} \frac{1}{j} J_z |+\rangle &= |-\rangle, \\ \frac{1}{j} J_z |-\rangle &= |+\rangle, \end{aligned} \quad (5.7)$$

co oznacza, że podprzestrzeń rozpięta na stanach $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ jest niezmiennicza ze względu na działanie operatora J_z/j .

Na tej podstawie definiujemy mierzoną obserwabłą Q (3.2), która reprezentowana jest przez operatory rzutowe:

$$\begin{aligned} \Pi_+ &= |+\rangle \langle +|, \\ \Pi_- &= 1 - \Pi_+, \end{aligned} \quad (5.8)$$

gdzie stan początkowy przyjmuje się dla prostoty jako $\varrho(0) = \Pi_+$.

5.3 Wyniki

Rozwiązanie równania master dla uśrednionej dynamiki $\varrho(t)$ (5.5) dzielimy na dwie kategorie: dla sprzężenia podłużnego ($V = J_z$) oraz poprzecznego ($V = J_x$).

Sprzężenie podłużne

W przypadku sprzężenia podłużnego specjalny wybór obserwabli Q (5.8) umożliwia rozwiązanie równania w sposób analityczny, jeśli tylko stan początkowy należy do przestrzeni rozpiętej na stanach $\{|+\rangle, |-\rangle\}$. Tym samym dla przyjętego stanu początkowego $\varrho(0) = \Pi_+$ można pokazać, że korelator LGI wynosi odpowiednio (E.2.30):

$$K_3 = 2e^{-4D\tau} \cos(2\tau) - e^{-8D\tau} \cos(4\tau). \quad (5.9)$$

Zwróćmy uwagę, że pomijając skalowanie $1/j$ otrzymujemy (E.2.32):

$$K_3 = 2e^{-4j^2 D\tau} \cos(2j\tau) - e^{-8j^2 D\tau} \cos(4j\tau). \quad (5.10)$$

Oznacza to, że skalowanie $1/j$ sprawia, że wykładnicze tłumienie korelatora oraz częstotliwość oscylacji funkcji K_3 są niezależne od j . Natomiast w przypadku generowanym przez Hamiltonian (5.1) wykładnik zależy od j w kwadracie oraz częstotliwość oscylacji rośnie z j w sposób liniowy. Implikuje to bardzo szybki zanik funkcji K_3 do zera przy jednoczesnym wzrastaniu oscylacji dla przypadku dużych j . Prowadzi to do sytuacji, w której skalowanie $1/j$ stabilizuje łamanie LGI, natomiast jego brak w typowym kwantowym opisie sukcesywnie je tłumi. W obu sytuacjach nieklasyczne korelacje zanikają w oczekiwany sposób wraz z rosnącą intensywnością szumu D , która jednocześnie nie wpływa na częstotliwość oscylacji.

Poza tym biorąc szczególny przypadek $j = 1/2$, dla którego $\Pi_{\pm} = \Pi_{\pm}(\pi/2, 0)$ oraz $\varrho(0) = \Pi_{+}(\pi/2, 0)$, gdzie $\Pi_{\pm}(\theta, \phi)$ zostało zdefiniowane w rozdziale poprzednim (4.5), wartość K_3 dla Hamiltonianu (5.1) w tym przypadku wynosi:

$$K_3 = 2e^{-D\tau} \cos(\tau) - e^{-2D\tau} \cos(2\tau). \quad (5.11)$$

Porównując ten wynik z wynikiem (4.13), który został otrzymany dla tej samej przestrzeni qubitów \mathcal{H}_S , dla tych samych warunków początkowych i w wyniku mierzenia tej samej obserwabli, wnioskujemy, że podłużne sprzężenie białego szumu o charakterystyce (5.3) efektywnie prowadzi do tej samej postaci funkcji K_3 co model słabego sprzężenia układu z termostatem modelowany za pomocą map Daviesa, jeśli tylko przyjmimy $\tau_D = (\lambda_0^2 D_0)^{-1}$. Wynik ten jest naturalnie zrozumiały, jako że sprzężenie podłużne jest przykładem procesu typu „defazującego” (czystej dekoherencji).

Sprzężenie poprzeczne

Analiza zredukowanej dynamiki układu danej przez równanie master (5.5) dla sprzężenia poprzecznego ($V = J_x$) wymaga użycia metod numerycznych. W szczególności równanie to zostało obliczone poprzez dyskretyzację dziedziny czasowej i numeryczne całkowanie równania różnicowego. Otrzymane wyniki dla szeregu różnych parametrów przedstawiono na rysunku (R.2.1) oraz (R.2.2). Wyniki te wykazują zdecydowanie inny charakter niż w przypadku sprzężenia podłużnego. Po pierwsze, model ze skalowaniem jest wrażliwy na zależność od wartości momentu pędu j , co nie było obserwowane dla sprzężenia podłużnego (5.9). Łamanie LGI w zależności od j jest nieoczekiwane i interesujące, ponieważ w tym przypadku nierówność jest tym mocniej łamana im większa

jest wartość momentu pędu j . Oznacza to, że granica klasyczna (gdy $j \rightarrow \infty$) powinna wykazywać maksymalne łamanie (prawdopodobnie zbieżne do tego, które wykazuje układ swobodny (2.15)). Po drugie, dokładne porównanie obu sprzężeń dla tego samego zestawu parametrów pokazuje, że silniejsze tłumienie nieklasycznych korelacji wykazuje model sprzężenia podłużnego. Jest to ponownie zachowanie nieintuicyjne, ponieważ dla sprzężenia poprzecznego należałoby się spodziewać silniejszej „dysypacji” stanu ze względu na niezachowywanie wartości oczekiwanej Hamiltonianu swobodnego $\langle J_z \rangle$ (przeciwnie do sprzężenia podłużnego).

Podobnie jak dla modelu sprzężenia podłużnego, również w modelu poprzecznym został przedyskutowany wpływ skalowania $1/j$. W przeciwieństwie do tego pierwszego, gdzie skalowanie zdecydowanie zmienia charakter funkcji K_3 (czyniąc ją całkowicie niezależną od wartości j), w przypadku poprzecznym zarówno model ze skalowaniem jak i bez wykazuje podobne zachowanie. W szczególności nadal słuszny jest fakt, że wraz ze wzrastającym całkowitym momentem pędu j układ jest mniej podatny na działanie szumu; jego zachowanie w kontekście wykazywania nieklasycznych korelacji w czasie jest bliższe dynamice układu swobodnego (2.15). Jednakże jak zostało przedstawione na rysunku (R.2.3) skalowanie $1/j$ powoduje większe rozróżnienie pomiędzy stanami ze względu na maksymalną wartość funkcji K_3 jaką układ może osiągnąć. Szczególnie należy zwrócić uwagę na fakt, że maksymalna wartość korelatora dla modelu bez skalowania i dla małych wartości intensywności szumu D jest praktycznie niezależna od wartości j (w tym sensie stany te są nierozróżnialne). Degeneracja ta natomiast zostaje usunięta w wyniku wprowadzonego skalowania. Inną ciekawą obserwacją jest odbiegające od ogólnego trendu zachowanie układu o wartości $j = 1/2$. W przypadku modelu bez skalowania układ ten wykazuje maksymalne łamanie LGI niezgodnie z ogólną tendencją – wraz ze wzrastającą wartością j , rośnie maksymalna amplituda funkcji K_3 . W przypadku modelu ze skalowaniem zachowanie to jest częściowo „naprawione”, jednak tylko dla pewnego zakresu małych wartości D , gdyż dla większych układ ten nadal wykazuje nieoczekiwane duże łamanie LGI w porównaniu ze stanami o wartościach $j \geq 1/2$. Ponadto zarówno dla sprzężenia podłużnego, jak i poprzecznego najmniejsza wartość K_3 jest obserwowana dla wartości $j = 1$.

5.4 Podsumowanie

Powyższa wielopłaszczyznowa analiza problemu łamania nierówności LGI na skutek perturbacji dynamiki momentu pędu wywołanej szumem, ujawnia złożoność dyskutowanego problemu. W badaniach pokazano, że korelator K_3 może zdecydowanie zmienić swoją postać funkcyjną wraz ze zmianą kierunku sprzężenia i/lub zastosowanego skalowania opartego na metodach semi-klasycznych. W przypadku sprzężenia podłużnego wyprowadzona analityczna postać funkcji K_3 ujawnia wykładnicze tłumienie korelatora, co efektywnie jest równoważne dynamice układu słabo sprzężonego z otoczeniem termicznym (A.1). Tłumienie to w wyniku skalowania staje się niezależne od wartości momentu pędu, natomiast bez skalowania przyspiesza tłumienie przy przejściu do obszaru klasycznego (dużych wartości j). Natomiast dla sprzężenia poprzecznego, przeciwnie, łamanie LGI jest tym mocniejsze im większa wartość momentu pędu. Skalowanie w tym przypadku nie zmienia ogólnego charakteru choć jego wpływ jest obserwowany, np. poprzez zniesienie degeneracji dla małych wartości intensywności szumu.

Leggett–Garg inequalities for a quantum top affected by classical noise

Jerzy Dajka^{1,2} · Marcin Łobejko^{1,2} ·
Jerzy Łuczka^{1,2}

Received: 4 April 2016 / Accepted: 21 July 2016 / Published online: 1 August 2016
© The Author(s) 2016. This article is published with open access at Springerlink.com

Abstract The violation of the Leggett–Garg inequality is studied for a quantum top (with angular momentum J_z of integer or half-integer size), being driven by classical Gaussian white noise. The form of a longitudinal (J_z) or a transverse (J_x) coupling of noise to the angular momentum affects both (i) to what extent the Leggett–Garg inequality is violated and (ii) how this violation is influenced by the size j of the spinning top and direction of a coupling (transverse or longitudinal). We introduce j -independent method, using two-dimensional invariant subspace of the system Hilbert space, which allows us to find out strict analytical solution for a noise-free system and with longitudinal coupling and to extract from the whole dynamics effects purely induced by a noise. It is demonstrated that in the semi-classical limit of a large angular momentum j and for the transverse coupling, the Leggett–Garg inequalities become more strongly violated as compared to the deep quantum regime of small j .

Keywords Leggett–Garg inequalities · Temporal quantum correlations · Quantum open systems · Dissipative dynamics · Classical noise

✉ Marcin Łobejko
mlobejko@us.edu.pl

Jerzy Dajka
jerzy.dajka@us.edu.pl

Jerzy Łuczka
jerzy.luczka@us.edu.pl

¹ Institute of Physics, University of Silesia, Katowice, Poland

² Silesian Center for Education and Interdisciplinary Research, University of Silesia, Chorzow, Poland

1 Introduction

There are various properties of quantum systems which are worth to be designed and controlled. Quantum entanglement [18] (and other types of *spatial* correlations [29]), a useful resource for quantum information, is among these properties of time-evolving quantum systems which attract considerable attention. Presence of entanglement can be detected [15] by the violation of various forms of Bell inequalities [5]. Recent studies on quantum correlations *in time* show that such correlations are no less interesting as these in space [12]. Non-classical time correlations between outcomes of measurements realized at different time instants are indicated by the violation of the Leggett–Garg inequalities (LGIs) [21]. The Leggett–Garg and the Bell scenarios can formally be unified [26]; however, interpretation of what is actually tested by LGIs seems to be still unclear [27]. In Ref. [12], there is an up-to-date review of both basic theoretical and experimental achievements related to the LGI.

The simplest form of the LGI reads [12]

$$K_3 = C_{21} + C_{32} - C_{31} \leq 1. \quad (1)$$

The correlator $K_3 \equiv K_3(t)$ is a combination of three time correlation functions given by an expected value of an anti-commutator [12] $C_{ji} = \frac{1}{2} \langle \{Q(t_j), Q(t_i)\} \rangle$ of a dichotomous observable $Q(t)$ in the Heisenberg picture with corresponding measurement values $q(t) = \pm 1$ at three successive time instants $t_1 < t_2 < t_3$. Due to the existence of superposition states, quantum mechanics should violate the above inequality. Experimental testing of LGIs and search for their possible violation are subtle problems due to required non-invasiveness of measurement of the quantity Q [12] and ‘macroscopicity’ of quantum states. The LGIs are interesting by their own also in microscopic systems [6] so the second requirement is often abandoned. There are also certain conceptual difficulties related to the problem of the ‘clumsiness loophole’ [12]. In order to avoid confusion, we simply claim that the violation of the LGI in (1) is a hallmark of the violation of the *Leggett–Garg realism* in the considered system. In such a way, we attempt to encapsulate all the fundamental problems related to a proper interpretation of the violation of the inequality (1), cf. Ref. [27].

Calculation of the correlation functions C_{ji} for the case of strictly Markovian evolution of a quantum system (either closed or open) is simplified by negligibility of entanglement between the system and its environment [11]. For any quantum system prepared at time t_0 in a state $\rho(t_0)$ evolving according to Markovian and continuous time dynamical semigroup $\rho(t) = \Lambda(t - t_0)\rho(t_0)$, the correlation functions in Eq. (1) can be expressed by the relation in the Schrodinger picture [6]:

$$C_{ji} = \sum_{l,m} q_m q_l \text{Tr} \{ \Pi_m \Lambda(t_j - t_i) [\Pi_l \Lambda(t_i) \rho(0) \Pi_l] \}, \quad (2)$$

where Π_l are projector operators representing the measurement of the dichotomous quantity $Q = Q(0)$ with the measurement output either $q_l = +1$ or $q_l = -1$.

The design of appropriate features of evolving quantum systems is a subject of the quantum control theory [8]. For quantum systems, an open-loop control is conceptually

simpler than a closed loop one as it does not demand feedback with respect to an output of a measurement performed on a quantum system [34]. There are various types of open-loop driving. The simplest is a classical field (e.g., magnetic or electric) which introduces a time-dependent component to a Hamiltonian of the quantum system. The most complex is a quantum field such as n -mode bosonic field typical for quantum optical problems [34]. Somewhere in between is a classical stochastic driving (stochastic control [16]) which can be considered either as a classical field with certain degree of randomness or as a suitable stochastic limit of a quantum driving [1]. There is a deep relation between dynamic properties of evolving systems and their symmetries [8]. One of the best studied symmetries is related to rotation of the system and its angular momentum [3]. Quantum systems described by Hamiltonians built by angular momentum operators, either integer or half-integer, are called quantum tops and are widely studied in various branches of physics starting from mathematical physics [31] via quantum chaos [17] up to quantum networks [25]. As the quantum tops have a well-defined classical limit [17], they are particularly important for studies of quantum properties in a semi-classical limit. For instance, one can investigate how quantum entanglement is maintained when a system or its part [7,9] becomes ‘more classical’ and compare results with other approaches to a classical limit of quantum systems [10,13,20].

In this work, we study a quantum top driven by Gaussian white noise and analyze the noise impact on the violation of the LGI. We consider two ways how the noise source couples to the top, each leading to quantitatively different behavior of the correlator K_3 . The external noise weakens the violation of the LG inequality, but this effect is less significant in the semi-classical limit of the large top. We show that, counterintuitively, in the semi-classical regime, the Leggett–Garg realism is more likely to be broken than in the very quantum regime.

The paper is organized as follows: In Sect. 2, we describe a model of the quantum top driven by Gaussian white noise and discuss an equivalence of its evolution with a suitably constructed Lindblad quantum dynamical semigroup. In Sect. 3, we present and discuss properties of the function K_3 for the noise-assisted system. We compare this result to a purely deterministic, noiseless evolution. Next, before summarizing the work in Sect. 4, we conjecture that the properties of the function K_3 originate from the fact that in the semi-classical limit the noise-driven and noiseless quantum tops are less distinguishable.

2 Methods

2.1 Noise-assisted top

Quantum tops are studied in different contexts in various branches of physics. Semi-classical methods related to the field of quantum chaos [17] are probably most widely known. Here we consider a simple model of an angular momentum $\mathbf{J} = (J_x, J_y, J_z)$, $[J_i, J_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}J_k$, where ϵ_{ijk} is the completely antisymmetric Levi-Civita symbol. The eigenvalues Λ_j of the operator \mathbf{J}^2 are $\Lambda_j = \hbar^2 j(j+1)$, $j \in \{0, 1/2, 1, 3/2, 2, \dots\}$. The time evolution of the top is governed by the Hamiltonian

$$H = \hbar\omega_0 \frac{J_z}{j} + \hbar\lambda_0 \tilde{\xi}(t) \frac{V}{j}, \quad V = J_z \quad \text{or} \quad V = J_x, \quad (3)$$

where $\tilde{\xi}(t)$ is an external random driving (noise). The first term describes a precession around the z axis with the scaled angular frequency ω_0/j . The second term can be interpreted as random kicks around the z axis for $V = J_z$ or around the x axis for $V = J_x$ by random angles proportional to the coupling strength λ_0/j and the square root of the intensity D_0 of noise (which is defined by its correlation function, see below). We use such scaling because in the limit $j \rightarrow \infty$ mean values of three quantities

$$X = \frac{\langle J_x \rangle}{j}, \quad Y = \frac{\langle J_y \rangle}{j}, \quad Z = \frac{\langle J_z \rangle}{j}, \quad (4)$$

become [33]

$$(X, Y, Z) = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta), \quad (5)$$

where θ is the polar angle and ϕ is the azimuthal angle. Therefore, (X, Y, Z) represents a point on the Bloch sphere with radius $R = 1$. For large $j \gg 1$, semi-classical behavior should be uncovered.

We restrict our consideration to a linear coupling of the system with noise and two possible choices: either $V = J_z$ or $V = J_x$. The coupling to J_y is equivalent to the coupling to J_x and therefore is not considered. The coupling $V = J_z$ corresponds to a simplest ‘dephasing-like’ coupling [4, 22], whereas the second coupling $V = J_x$ could describe tunneling effects in some multistable systems. As we show below, these two cases result in significantly different behaviors of the corresponding function K_3 .

The classical and real-valued stochastic driving $\tilde{\xi}(t)$ is modeled by zero-mean δ -correlated Gaussian white noise,

$$\langle \tilde{\xi}(t) \rangle = 0, \quad (6)$$

$$\langle \tilde{\xi}(t) \tilde{\xi}(s) \rangle = 2D_0 \delta(t - s), \quad (7)$$

where $\langle \cdot \rangle$ means the averaging over all realizations of the stochastic process $\tilde{\xi}(t)$ [14] and the parameter D_0 is the intensity of noise. We should remember that the characteristic time of white noise, i.e., its correlation time, is zero, and therefore, it does not introduce a new time scale into the system.

For each realization of $\tilde{\xi}(t)$, the density matrix $\tilde{\rho}(t)$ of the system satisfies the stochastic Liouville-von Neumann equation, namely

$$\frac{d}{dt} \tilde{\rho}(t) = -\frac{i\omega_0}{j} [J_z, \tilde{\rho}(t)] - \frac{i\lambda_0}{j} \tilde{\xi}(t) [V, \tilde{\rho}(t)]. \quad (8)$$

The limit $j \rightarrow \infty$ can be interpreted as a classical limit of the evolution equation [17]. In other words, the larger the j is, the more classical the system is, because its evolution can be effectively described as a classical dynamical system [9, 17].

2.2 Going to a dimensionless form

We introduce the dimensionless time $s = \omega_0 t$ and transform Eq. (8) to the form

$$\frac{d}{ds} \varrho(s) = -\frac{i}{j} [J_z, \varrho(s)] - \frac{i\lambda}{j} \xi(s) [V, \varrho(s)]. \quad (9)$$

where

$$\varrho(s) = \tilde{\varrho}\left(\frac{s}{\omega_0}\right) = \tilde{\varrho}(t), \quad \lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\omega_0}} \quad (10)$$

and rescaled δ -correlated noise

$$\xi(s) = \frac{1}{\sqrt{\omega_0}} \tilde{\xi}\left(\frac{s}{\omega_0}\right) \quad (11)$$

has a zero mean value and the same intensity D_0 as $\tilde{\xi}(t)$ in Eq. (7). Instead of searching for a solution of Eq. (9), what is even for a white noise case a formidable task, we focus our attention on averaged quantum dynamics, i.e., on time evolution of the quantum state $\rho(s) = \langle \varrho(s) \rangle$, which can be interpreted in a similar fashion as one does in the case of reduced dynamics of open quantum systems [4]. The averaged dynamics of a noise-driven system in Eq. (9) is determined by the exact master equation in the dimensionless form [23,24]:

$$\frac{d}{ds} \rho(s) = -\frac{i}{j} [J_z, \rho(s)] - \frac{D}{j^2} [V, [V, \rho(s)]], \quad (12)$$

where $D = \lambda^2 D_0$ is the rescaled noise intensity (or equivalently the rescaled coupling strength). This equation is of the Lindblad form [2], and for any initial preparation, its solution $\rho : s \rightarrow \rho(s)$ is nonnegative [2]. It has been derived under the assumption that initial conditions for the system alone are imposed independently of the stochastic driving $\xi(t)$, i.e.,

$$\langle \xi(0) \rho(0) \rangle = \langle \xi(0) \rangle \rho(0) = 0. \quad (13)$$

It is worth noting that the master equation of a similar structure occurs for other models of reduced dynamics. We mention two of them: a general class of nondissipative continual measurements of an angular momentum [32] and exact dynamics of (1/2)-spin in contact with a quantum bosonic thermostat via the dephasing interaction [22].

2.3 Two-dimensional invariant subspace

In the following sections, we will use the notation:

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|j, j\rangle + |j, -j\rangle) \quad (14)$$

$$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|j, j\rangle - |j, -j\rangle) \quad (15)$$

for a linear combination of the J_z operator eigenstates with extreme eigenvalues $m = \pm j$ (for arbitrary $j > 0$). A subspace spanned by the basis vectors $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ we denote as $\mathcal{H}_q = \text{span}(\{|+\rangle, |-\rangle\})$. It is clear that the states Eq. (14) and Eq. (15) transform under an action of the rescaled operator J_z/j as follows:

$$\begin{aligned} \frac{1}{j} J_z |+\rangle &= |-\rangle \\ \frac{1}{j} J_z |-\rangle &= |+\rangle \end{aligned} \quad (16)$$

and are orthonormal $\langle\alpha|\beta\rangle = \delta_{\alpha\beta}$ for $\alpha, \beta = 0, 1$. From the above rules, we can conclude that the subspace \mathcal{H}_q is invariant under the action of a time evolution generated by J_z/j . It means that for an arbitrary large angular momentum j , one can always construct a subspace which behaves as a qubit system. The action of the operator J_z/j on the states $|+\rangle, |-\rangle$ is equivalent to the action of the σ_x operator on the canonical qubits states, i.e., eigenvectors of σ_z operator. In particular, it means that if a system is projected on one of these two states $|+\rangle, |-\rangle$, then after that a system starts to oscillate between them with frequency ω_0 (for $D = 0$).

3 Results

The Leggett–Garg scenario for testing realism requires a measurement of a dichotomous variable. We consider a projective measurement of a single observable Q of the form:

$$Q = \sum_{q=\pm 1} q \Pi_q \quad (17)$$

where

$$\Pi_+ = |+\rangle \langle +| \quad (18)$$

$$\Pi_- = \mathbb{I} - \Pi_+, \quad (19)$$

and \mathbb{I} is the identity operator. In the following, we restrict our analysis to the three different dynamical scenarios in Eq. (12): the noise-free ($D = 0$), with the longitudinal coupling ($V = J_z$) and the transverse coupling ($V = J_x$). We present analytical solutions for a noise-free and longitudinal coupling for the initial states in the \mathcal{H}_q subspace and perform a numerical simulations for the transverse coupling.

3.1 Noise-free system

Setting $D = 0$ in Eq. (12), for any initial state $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_q$, the presented here scheme of a measurement and dynamics is equivalent to the widely studied system of the processing qubit. Taking it into consideration, we can immediately write down a form of the K_3 function, defined commonly for a fixed inter-measurement time interval τ (i.e., $s_3 - s_2 = s_2 - s_1 = \tau$):

$$K_3 = 2 \cos(2\tau) - \cos(4\tau). \quad (20)$$

We want to stress that the definition of the states Eq. (14) and the following discussion is j -independent. Such a specific choice of the measurement as defined in Eq. (18) and Eq. (19) is particularly convenient since it allows to extract from the function K_3 the information related purely to the intensity D of noise $\xi(t)$. In other words, any modification of K_3 from the above form will be, for fixed V in Eq. (3), solely a noise-induced effect.

3.2 Longitudinal coupling

As we mentioned before, the action of the J_z/j operator on the states $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ is equivalent to the action of a Pauli matrix σ_x on the canonical qubit states. Thus, if initial state belongs to the introduced invariant subspace, i.e., $|\psi\rangle \in H_q$, then Eq. (12) for $V = J_z$ can be reduced to the matrix form:

$$\frac{d}{ds} \rho(s) = -i[\sigma_x, \rho(s)] - D[\sigma_x, [\sigma_x, \rho(s)]], \quad (21)$$

where $\rho(s)$ is a matrix representation of a density operator in time s , computed in the basis $\{|+\rangle, |-\rangle\}$, and $\rho(0) = |\psi\rangle \langle \psi|$. We parameterized it as follows:

$$\rho(s) = \begin{bmatrix} p_+(s) & c(s) \\ c^*(s) & p_-(s) \end{bmatrix} \quad (22)$$

where $p_{\pm} = \text{Tr}(\Pi_{\pm} \rho)$. Substituting Eq. (22) into Eq. (21), we obtain:

$$\frac{d}{ds} \rho(s) = \begin{bmatrix} -(r(s) + 2Dp(s)) & i(p(s) - 2Dr(s)) \\ -i(p(s) - 2Dr(s)) & r(s) + 2Dp(s) \end{bmatrix} \quad (23)$$

where $p \equiv p_+ - p_-$ and $r \equiv i(c^* - c)$. From the above, we can write down the equation of motion for real variables p and r in the matrix form:

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} p(s) \\ r(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4D & -2 \\ 2 & -4D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(s) \\ r(s) \end{bmatrix}. \quad (24)$$

The general solution can be written as a superposition:

$$\begin{bmatrix} p(s) \\ r(s) \end{bmatrix} = Ae^{\lambda_1 s} \mathbf{v}_1 + Be^{\lambda_2 s} \mathbf{v}_2 \quad (25)$$

where the \mathbf{v}_i and λ_i (for $i = 1, 2$) are, respectively, eigenvectors with associated eigenvalues of the generator of a differential equation Eq. (24). In this case, we have:

$$\begin{bmatrix} p(s) \\ r(s) \end{bmatrix} = Ae^{-4Ds-2is} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} + Be^{-4Ds+2is} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}. \quad (26)$$

From this general solution, one can calculate the correlator K_3 for any initial state $|\psi\rangle \in H_q$, but in the following analysis, we will restrict our consideration to either a state $|+\rangle$ or $|-\rangle$. From this assumption, one can find out that $A = B = \pm \frac{1}{2}$. Since variables $p(s)$ and $r(s)$ are assumed to be real, from the above, we can extract two real solutions taking the real and imaginary part. Finally, we obtain:

$$\begin{bmatrix} p(s) \\ r(s) \end{bmatrix} = \pm e^{-4Ds} \begin{bmatrix} \cos(2s) \\ \sin(2s) \end{bmatrix}. \quad (27)$$

Next, we can define a conditional probability $p(q_2, s_2 | q_1, s_1) \equiv p(q_2 | q_1)$ of obtaining result $q_2 = \pm 1$ in time s_2 when in time s_1 was observed the value $q_1 = \pm 1$. Since $p_{\pm}(s) = \frac{1}{2}(1 \pm p(s))$, then we have:

$$p(q_2 | q_1) = \frac{1}{2} [1 + (-1)^{\delta_{q_1 q_2}} |p(\Delta s)|] \quad (28)$$

where $\Delta s = s_2 - s_1$. From that, one can construct a two-time probability $p(q_2, s_2; q_1, s_1) \equiv p(q_2, q_1)$ of obtaining a value q_1 in time s_1 and a value q_2 in time s_2 as a product $p(q_2, q_1) = p(q_2 | q_1) p_{q_1}$. From that, one can find out that correlation function Eq. (2) is equal:

$$C_{s_2 s_1} = \sum_{q_1, q_2 = \pm 1} q_1 q_2 p(q_2, q_1) = e^{-4D\Delta s} \cos(2\Delta s) \quad (29)$$

for a system initially prepared either in $|+\rangle$ state or $|-\rangle$ state. Finally, we conclude that K_3 function [Eq. (1)] for coupling $V = J_z$ and fixed inter-measurement is given by:

$$K_3 = e^{-4D\tau} (2 \cos(2\tau) - e^{-4D\tau} \cos(4\tau)). \quad (30)$$

3.3 Transverse coupling

Analytical calculations performed for the longitudinal coupling $V = J_z$ are possible due to a dynamic invariance of the subspace spanned by $|\pm\rangle$ states. Unfortunately, for

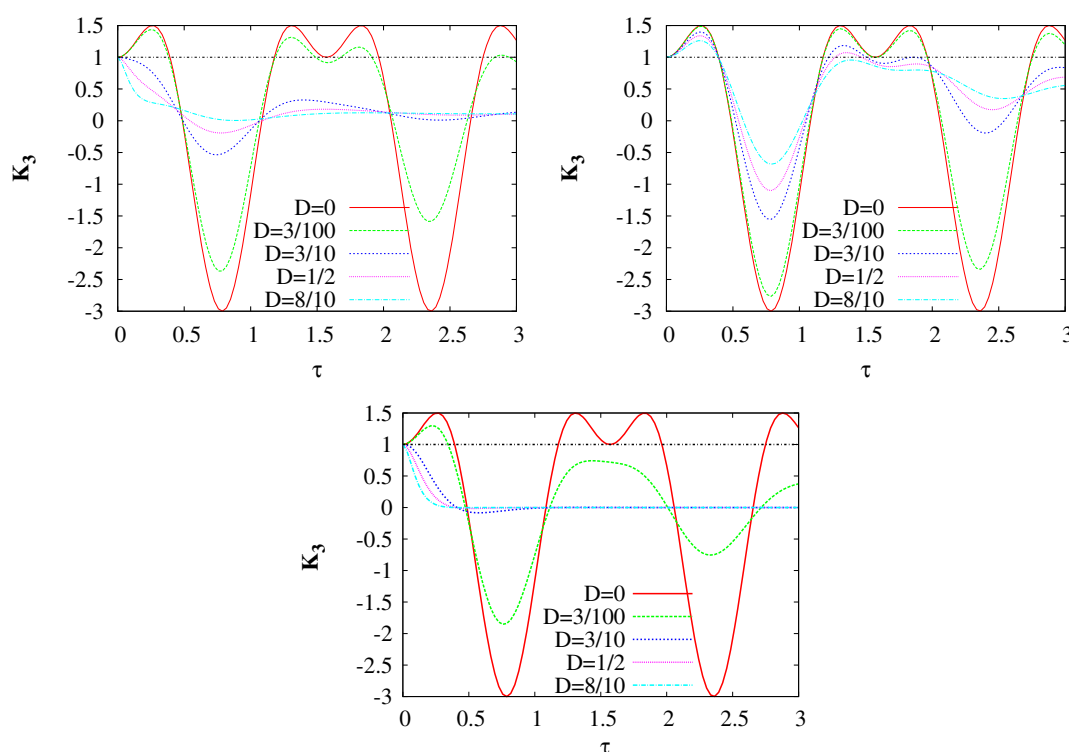


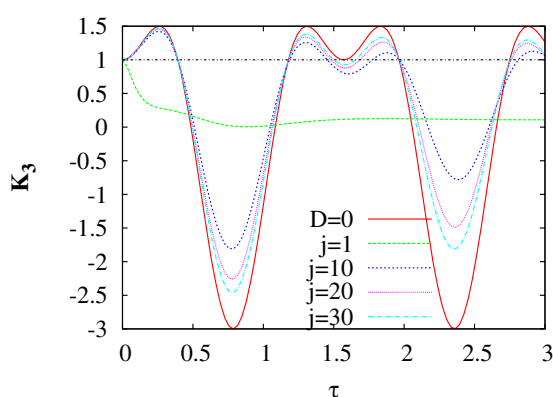
Fig. 1 The Leggett–Garg function K_3 versus inter-measurement time interval τ for selected values of the noise intensity D . *Top left panel* the quantum top with $j = 1$ and the coupling operator $V = J_x$. *Top right panel*: $j = 5$ and $V = J_x$. *Bottom panel* $V = J_z$ and arbitrary j number. Numerical data in all figures are prepared using QuTip, a Python-based computational toolbox [19] (Color figure online)

different types of coupling, it is no more the case. In particular, there is no method to solve analytically Eq. (12) for a coupling $V = J_x$. For such a transverse coupling, we perform numerical simulations using the Python-based toolbox QuTip [19] which is particularly useful for studying finite-dimensional open quantum systems described in terms of the Master Equations of a type Eq. (12), cf. Ref. [19] for details of the applied numerical procedure. In order to compare effectively two different types of coupling, the transverse with the longitudinal one, we restrict the analysis to a system initial preparation $\rho(0) = |+\rangle\langle+|$. The results are presented in Figs. 1 and 2.

4 Discussion

For the considered model, there are three elements affecting the LGI. The first, probably most natural, is the noise intensity D which occurs as the amplitude of the non-unitary part of the generator in Eq. (9). The second, more fundamental, is the way how external noise couples to the evolving quantum top encoded in the operator V in Eq. (3). The third, related to a semi-classical limit of the top evolution, is the size j of the top related to the dimension of the Hilbert space of the quantum system [3]. As presented in the last section, a solution of a noise-free system is j -independent; thus, it can be used as a natural reference to the noise-induced couplings. Furthermore, a longitudinal ($V = J_z$) coupling solution is also j -independent, and then, one can extract from this effects purely connected with the noise intensity D (or strength of a coupling λ). And

Fig. 2 The Leggett–Garg function K_3 versus inter-measurement time interval τ for the quantum top with different values of j . The noise intensity is $D = 0.8$ and the coupling operator is $V = J_x$ (Color figure online)



finally, a j -dependent solution for J_x coupling indicates how macrorealism is violated with respect to the dimension of a system state space. That is why we propose such specific form of the measured observable Eq. (17) and initial state $|\psi\rangle \in H_q$, since that model gives straightforward answers to all questions posed at the beginning. In addition, at the end we analyze the impact of a special scaling of the angular momentum operator \mathbf{J} by a factor $1/j$ [Eq. (4)].

4.1 Impact of noise

Let us start analysis with the impact of the noise intensity D on time evolution and the resulting violation of the LGI in Eq. (1). For the noiseless case $D = 0$, the correlator K_3 is explicitly given by the formula in Eq. (20) and can serve as a reference function. With a gradual increase in D , the time evolution of the system becomes far from unitary and one expects that genuine quantum properties, such as the violation of LGI, become less detectable. This intuitive picture is confirmed by the analytical result Eq. (30) for longitudinal coupling, where we see that dumping of LGI correlator is of the exponential form. Examples of different forms of the K_3 function for $V = J_z$ with respect to noise intensity D are present in the bottom panel in Fig. 1. In addition, results from numerical simulations for transverse ($V = J_x$) coupling are presented in the upper panel in Fig. 1. In top left panel, the correlator K_3 for the system with the fixed quantum number $j = 1$ is depicted for several values of the noise intensity D . For weak noise ($D = 3/100$), the function K_3 represents weakly damped oscillations with several τ -intervals in which the LGI is violated. For strong noise (the case $D \geq 3/10$ in left panel), the impact of noise is decisive: One cannot detect the violation of the LGI. For larger values of the quantum number $j = 5$ (top left panel), the violation of the LGI can be observed for more numbers of windows of τ -intervals. Even for strong noise with $D = 8/10$, the LGI is violated and can be detected in one short τ -interval between successive measurements.

4.2 Role of coupling

Less intuitive is the influence of remaining two ingredients. Comparing plots in top left and bottom panels of Fig. 1 for the coupling via the operators J_x and J_z , respectively,

one concludes that for $V = J_z$ the effect of noise is stronger: For $D = 3/100$, the LGI is violated only in one window of the τ -interval, while for $V = J_x$, there are four τ -intervals in which the LGI is violated. We observe that in order to maintain the violation of LGI in a longer time for $V = J_z$, one needs the noise intensity to be much smaller than in the case when $V = J_x$. It might be considered as counterintuitive because in the case $V = J_z$, the quantum top effectively undergoes Markovian *pure dephasing* [4], i.e., $J_z(s) = J_z(0)$ is a constant of motion. It mimics an open quantum system with no energy exchange with the source of noise. In the case of seemingly stronger decoherence for $V = J_x$ and for a fixed noise intensity D , the LGI violation is weaker.

4.3 Dependence on the quantum number j

The effect of the size j of the top might also be counterintuitive. It seems that for large j , the system should be more classical, and in consequence, the LGI should be more robust. From Eq. (30), it is clear that for $V = J_z$ the correlator K_3 inherits j -independence recognized already in the noiseless case $D = 0$ [Eq. (20)]. Comparing curves in top left and top right panels in Fig. 1, one notices that the violation of the LGI is *more stable* with respect to noise for *larger* values of j . It is even more apparent in the semi-classical limit of large j as presented in Fig. 2: When j becomes larger and larger, the function K_3 becomes closer and closer to the noiseless case $D = 0$. In other words, for the semi-classical top, the violation of the LGI becomes more significant comparing to the top operating at the deep quantum regime of small j . The full analysis of how the maximum of K_3 changes with respect to j (for different noise intensity D) is presented in the upper panels of Fig. 3. From these, we see surprisingly that the maximal violation of LGI is non-monotonic in the whole domain, but it is only monotonically increasing for the values $j > 1$ and monotonically decreasing for $j < 1$ and relatively high values of noise intensity.

The reason of this phenomenon becomes apparent if one examines the trace distance $\Delta(s)$ between the noisy state $\rho(s)$ when $D > 0$ and the noiseless state $\rho_0(s)$ when $D = 0$. The trace distance is defined by the relation [30]

$$\Delta(s) = \frac{1}{2} \text{Tr} |\rho(s) - \rho_0(s)|, \quad (31)$$

where $|X| = \sqrt{X^\dagger X}$ for any operator X . In Fig. 3, one can observe that at a fixed time instant s , the distance between the noisy state $\rho(s)$ and the noiseless state $\rho_0(s)$ decreases when the quantum number j increases. As the trace distance is a quantifier of *distinguishability* of states [30], we conclude that in the semi-classical limit $j \gg 1$ the noisy and noiseless evolution are more similar than in the case of quantum system with small values of j . This feature is responsible also for the behavior of the correlator K_3 and the violation of the Leggett–Garg realism.

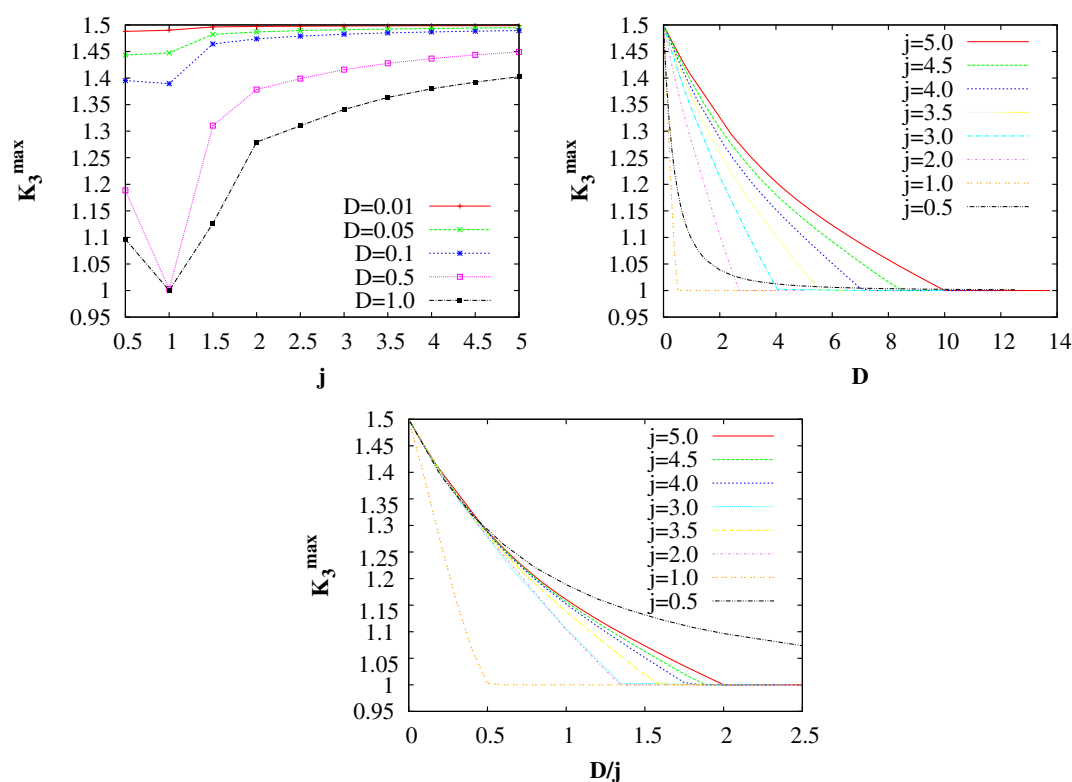
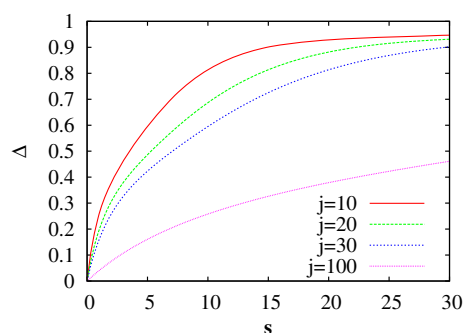


Fig. 3 The maximum of the Leggett–Garg function K_3 for the transverse coupling ($V = J_x$) versus: (*top left panel*) the absolute value of the quantum top angular momentum j with different values of a noise intensity D , (*top right panel*) the noise intensity D for different values of j and (*bottom panel*) the rescaled noise intensity D/j . Panel at the *bottom* is used as a reference, since it shows a maximum value of the K_3 function with respect to the noise intensity D/j , which is equivalent to the noise intensity D for a model without scaling $1/j$. It shows a little bit different behavior than in the rescaled model (*top right panel*), but they exhibit the same main feature that higher j values are more resistant on the applied noise. As it is seen from graphs, a scaling makes systems more distinguishable with respect to their angular momentum, especially systems violate Leggett–Garg inequalities differently for all values of a noise intensity, whereas in the non-rescaled model, we can distinguish between different j -states only in the regime of high D values. Interesting is a fact that a system with $j = 1$ is enormously low resistant on the noise (in both models) and system with $j = 1/2$ is enormously high resistant (in non-rescaled model) (Color figure online)

Fig. 4 Trace distance calculated between the noisy state $\rho(s)$ (for $D = 0.8$ and $V = J_x$) and noiseless state $\rho_0(s)$ ($D = 0$) for selected values of j (Color figure online)



4.4 Role of scaling

At the end, we present how the special scaling of the angular momentum \mathbf{J} operator by a factor $1/j$ in Eq. (4) (which we use in order to analyze a semi-classical behavior)

affects a violation of the Leggett–Garg inequalities. Let us notice a very different physical content of both the scaled and non-scaled models. The first describes a well-defined semi-classical limit of a well-established quantum system, whereas the second is an essentially quantum system described by quantum numbers of a relatively large values.

As it can be inferred from Eq. (12), a model without scaling can be restored by the replacement: $s \rightarrow js$ and $D \rightarrow jD$, which transform Eq. (30) into the relation:

$$K_3 = e^{-4Dj^2\tau} \left(2 \cos(2j\tau) - e^{-4Dj^2\tau} \cos(4j\tau) \right). \quad (32)$$

In this case, we observe a strong dumping of the K_3 function amplitude for the systems with higher angular momentum j . In addition, without scaling, a period of K_3 function is also affected by the total angular momentum of the system. We want to stress that the j -independent solution for the operators Eq. (4) has a source in the special action of the operator J_z/j on the states $|+\rangle, |-\rangle$ in Eq. (16).

We also analyze an impact of scaling at the maximum of the K_3 amplitude with respect to j number for a transverse coupling. For this reason, we present the results for non-rescaled model in the bottom panel in Fig. 4. Surprisingly, we observe very similar behavior like in main (scaled) model in this paper, i.e., systems with higher angular momentum j are more resistant with respect to noise in the context of violation of the macrorealism. It is an opposite behavior if one compares it with the J_z coupling for non-scaled model [Eq. (32)].

5 Conclusions

Realism of classical objects seems to be unquestionable. Almost no one doubts that ‘there is a moon when nobody looks’ [28]. The case of a ‘flux’ [21] is less obvious, whereas for microscopic objects, the violation of Leggett–Garg realism is probably as generic as the violation of local realism of composite systems [18].

In this work, we study the quantum top assisted by classical Gaussian white noise starting from a very quantum regime of small values of the quantum number j and finishing in the semi-classical regime of large j . We investigate the violation of the LGI involving the function K_3 in Eq. (1). The measurement defined in Eq. (18) is chosen in such a way that in the absence of noisy driving, the correlator K_3 is j -independent. We consider two types of coupling V in Eq. (3). For $V = J_z$, the function K_3 is shown to be j -independent, although the LG inequality is, in the presence of noise, less likely violated. For $V = J_x$, the violation of the LG inequality is more stable than in the case $V = J_z$. We observe that for $V = J_x$ the violation still occurs but for the noise intensity larger than in the case $V = J_z$. In other words, for a given amount of noise in the system and the coupling $V = J_x$, the Leggett–Garg realism is ‘better violated’ than in the case $V = J_z$. Moreover, contrary to a natural intuition, the semi-classical noise-assisted top is, for a given amount of noise and $V = J_x$, more likely to be a stage of the violation of the Leggett–Garg realism.

We hope that despite simplicity of the considered model, results of the paper enhance our understanding of what Leggett–Garg realism is and how it can be controlled by external stochastic driving.

Acknowledgments The work has been supported by the NCN project DEC-2013/09/B/ST3/01659 (JD).

Open Access This article is distributed under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>), which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided you give appropriate credit to the original author(s) and the source, provide a link to the Creative Commons license, and indicate if changes were made.

References

1. Accardi, L., Lu, Y., Volovich, I.: Quantum Theory and its Stochastic Limit. Springer, Berlin (2002)
2. Alicki, R., Lendi, K.: Quantum Dynamical Semigroups and Applications. Lecture Notes in Physics. Springer, Berlin (2007)
3. Biedenharn, L., Louck, J.: Angular Momentum in Quantum Physics. Theory and Application. Cambridge University Press, Cambridge (1984)
4. Breuer, H.P., Petruccione, F.: The Theory of Open Quantum Systems. Oxford University Press, Oxford (2003)
5. Brunner, N., Cavalcanti, D., Pironio, S., Scarani, V., Wehner, S.: Bell nonlocality. Rev. Mod. Phys. **86**, 419–478 (2014). doi:[10.1103/RevModPhys.86.419](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.86.419)
6. Budroni, C., Emary, C.: Temporal quantum correlations and leggett-garg inequalities in multilevel systems. Phys. Rev. Lett. **113**, 050,401 (2014). doi:[10.1103/PhysRevLett.113.050401](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.113.050401)
7. Dajka, J.: Disentanglement of qubits in classical limit of interaction. Int. J. Theor. Phys. **53**(3), 870–880 (2014). doi:[10.1007/s10773-013-1876-9](https://doi.org/10.1007/s10773-013-1876-9)
8. D'Alessandro, D.: Introduction to Quantum Control and Dynamics. Taylor & Francis Group, London (2008)
9. Demkowicz-Dobrzański, R., Kuś, M.: Global entangling properties of the coupled kicked tops. Phys. Rev. E **70**, 066,216 (2004). doi:[10.1103/PhysRevE.70.066216](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.70.066216)
10. Elze, H.T.: Linear dynamics of quantum-classical hybrids. Phys. Rev. A **85**, 052,109 (2012). doi:[10.1103/PhysRevA.85.052109](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.85.052109)
11. Emary, C.: Decoherence and maximal violations of the leggett-garg inequality. Phys. Rev. A **87**, 032,106 (2013). doi:[10.1103/PhysRevA.87.032106](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.87.032106)
12. Emary, C., Lambert, N., Nori, F.: Leggett–garg inequalities. Rep. Prog. Phys. **77**(1), 016,001 (2014). <http://stacks.iop.org/0034-4885/77/i=1/a=016001>
13. Fratino, L., Lampo, A., Elze, H.T.: Entanglement dynamics in a quantum–classical hybrid of two q-bits and one oscillator. Phys. Scr. **2014**(T163), 014,005 (2014). <http://stacks.iop.org/1402-4896/2014/i=T163/a=014005>
14. Gardiner, C.: Handbook of Stochastic Methods. Springer, Berlin (1997)
15. Gühne, O., Tóth, G.: Entanglement detection. Phys. Rep. **474**(1–6), 1–75 (2009). doi:[10.1016/j.physrep.2009.02.004](https://doi.org/10.1016/j.physrep.2009.02.004). <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157309000623>
16. Gihman, I., Skorohod, A.V.: Controlled Stochastic Processes. Springer, Berlin (1979)
17. Haake, F.: Quantum Signatures of Chaos. Wiley, Hoboken (1991)
18. Horodecki, R., Horodecki, P., Horodecki, M., Horodecki, K.: Quantum entanglement. Rev. Mod. Phys. **81**, 865–942 (2009). doi:[10.1103/RevModPhys.81.865](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.81.865)
19. Johansson, J., Nation, P., Nori, F.: Qutip 2: a python framework for the dynamics of open quantum systems. Comp. Phys. Commun. **184**(4), 1234–1240 (2013). doi:[10.1016/j.cpc.2012.11.019](https://doi.org/10.1016/j.cpc.2012.11.019). <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0010465512003955>
20. Lampo, A., Fratino, L., Elze, H.T.: Mirror-induced decoherence in hybrid quantum-classical theory. Phys. Rev. A **90**, 042,120 (2014). doi:[10.1103/PhysRevA.90.042120](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.90.042120)
21. Leggett, A.J., Garg, A.: Quantum mechanics versus macroscopic realism: Is the flux there when nobody looks? Phys. Rev. Lett. **54**, 857–860 (1985). doi:[10.1103/PhysRevLett.54.857](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.54.857)
22. Łuczka, J.: Spin in contact with thermostat: exact reduced dynamics. Phys. A **167**, 919 (1990). doi:[10.1016/0378-4371\(90\)90299-8](https://doi.org/10.1016/0378-4371(90)90299-8)

23. Łuczka, J.: Quantum open systems in a two-state stochastic reservoir. *Czech. J. Phys.* **41**(17), 289 (1991)
24. Łuczka, J., Niemiec, M.: A master equation for quantum systems driven by poisson white noise. *J. Phys. A Math. Gen.* **24**(17), L1021 (1991). <http://stacks.iop.org/0305-4470/24/i=17/a=010>
25. Mahler, G., Weherruss, V.: *Quantum Networks. Dynamics of Open Nanostructures*. Springer, Berlin (1998)
26. Markiewicz, M., Kurzyński, P., Thompson, J., Lee, S.Y., Soeda, A., Paterek, T., Kaszlikowski, D.: Unified approach to contextuality, nonlocality, and temporal correlations. *Phys. Rev. A* **89**, 042,109 (2014). doi:[10.1103/PhysRevA.89.042109](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.89.042109)
27. Maroney, O.J.E., Thomson, C.G.: Quantum- vs. macro- realism: What does the leggett-garg inequality actually test? (2014). [arXiv:1412.6139](https://arxiv.org/abs/1412.6139)
28. Mermin, N.D.: Is the moon there when nobody looks? Reality and the quantum theory. *Phys. Today* **38**(4), 38–47 (1985)
29. Modi, K., Brodutch, A., Cable, H., Paterek, T., Vedral, V.: The classical-quantum boundary for correlations: Discord and related measures. *Rev. Mod. Phys.* **84**, 1655–1707 (2012). doi:[10.1103/RevModPhys.84.1655](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.84.1655)
30. Nielsen, M., Chuang, I.: *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, Cambridge (2000)
31. Perelomov, A.: *Generalized Coherent States and Their Applications*. Springer, Berlin (1986)
32. Sanders, B.C.: Quantum dynamics of the nonlinear rotator and the effects of continual spin measurement. *Phys. Rev. A* **40**, 2417–2427 (1989)
33. Wang, X., Ma, J., Song, L., Zhang, X., Wang, X.: Spin squeezing, negative correlations, and concurrence in the quantum kicked top model. *Phys. Rev. E* **82**, 056,205 (2010). doi:[10.1103/PhysRevE.82.056205](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.82.056205)
34. Wiesman, H., Milburn, G.: *Quantum Measurement and Control*. Cambridge University Press, Cambridge (2009)

Rozdział 6

(A.3) Łamanie nierówności w wyniku oddziaływania nadsubtelnego

6.1 Wstęp

W trzecim z prezentowanych w niniejszej rozprawie modeli mających na celu obliczenie korelatora K_3 jest pomiar cząstki o spinie $1/2$, która w wyniku ewolucji w czasie ulega nadsubtelnemu sprzężeniu typu spin-spin. Pierwotną motywacją do analizy prezentowanego modelu jest jego realizacja w fizycznym układzie atomów pierwiastków z pierwszej grupy układu okresowego. W izolowanych atomach tych pierwiastków dochodzi do sprzężenia nadsubtelnego pomiędzy spinem jądra i spinem pojedynczego elektronu walencyjnego, co w konsekwencji prowadzi do nietrywialnej wartości funkcji K_3 .

W niniejszej pracy za pomocą metod numerycznych otrzymano postać korelatora K_3 dla dyskutowanego wyżej oddziałującego elektronu w atomie. Zaobserwowano, że poprzez zmianę kierunku pomiaru spinu elektronu, z podłużnego na poprzeczny względem początkowej orientacji spinu jądra, maksymalna wartość funkcji K_3 może być odpowiednio skorelowana z małymi lub dużymi wartościami całkowitego spinu jądra. Ponieważ promień atomu oraz wartość spinu dla trwałych izotopów rośnie w dół pierwszej grupy, oznacza to, że odpowiednio wykonany pomiar może prowadzić do tym większego łamania LGI im większy jest badany układ (przeciwnie do poglądu makroskopowego realizmu). Ponadto funkcja K_3 w dyskutowanym modelu może zostać – co do zasady – zmierzona w rzeczywistym eksperymencie, w którym wiązka atomów jest przepuszczana przez niejednorodne pole magnetyczne, czyli ulega filtracji w wyniku pomiaru typu

Sterna–Gerlacha. Pomiar korelatora K_3 wymaga przeprowadzenia powyższej procedury dwukrotnie, przy czym pierwsza filtracja może zostać wykonana w sposób idealnie negatywny, co jest wymagane w eksperymentalnych testach makrorealizmu bez luk (zobacz Rozdział 2.4).

6.2 Model

Sprężenie z otoczeniem

W rozważanym modelu założono, że atomy z pierwszej grupy układu okresowego znajdują się w stanie atomowym $^2S_{1/2}$. Oznacza to, że wkład do całkowitego momentu pędu elektronów w atomie pochodzi tylko i wyłącznie od spinu \vec{s} pojedynczego elektronu na powłoce walencyjnej. Elektron ten oddziałuje z polem magnetycznym generowanym przez niezerową wartość spinu jądra atomowego \vec{I} , co efektywnie prowadzi do tak zwanego oddziaływania nadsubtelnego typu spin-spin. Hamiltonian tego oddziaływania wyraża się w postaci (B.3.9):

$$H_I = -\frac{2\mu_0}{3}\vec{\mu}_n \cdot \vec{\mu}_e \delta(\vec{r}) - \frac{\mu_0}{4\pi r^3} [3\frac{\vec{\mu}_n \cdot \vec{r}}{r} \frac{\vec{\mu}_e \cdot \vec{r}}{r} - \vec{\mu}_n \cdot \vec{\mu}_e], \quad (6.1)$$

gdzie

$$\vec{\mu}_e = -\frac{g_e e}{2m_e} \vec{s}, \quad \vec{\mu}_n = -\frac{Z g_n e}{2m_n} \vec{I} \quad (6.2)$$

to odpowiednio moment magnetyczny elektronu i jądra atomowego, g_k to tak zwany czynnik g (ang. g -factor), m_k to masa (gdzie $k = e, n$), e to ładunek elementarny, Z to liczba atomowa jądra, r to względna odległość pomiędzy elektronem i jądrem, $\delta(\vec{r})$ to trójwymiarowa delta Diraca i μ_0 to stała magnetyczna.

Hamiltonian ten miesza położeniowe oraz spinowe stopnie swobody elektronu i jądra, co zdecydowanie komplikuje rozwiązanie modelu. Problem jednakże ulega znacznemu uproszczeniu, gdy przyjęte zostaną następujące założenia. Po pierwsze, efektywna położeniowa funkcja falowa $\psi_s(r)$ pojedynczego elektronu walencyjnego jest sferycznie symetryczna (typu s), co wynika z faktu, że atomy znajdują się w stanie $^2S_{1/2}$. Po drugie, część spinowa funkcji falowej $|\chi(t)\rangle$ elektronu walencyjnego i jądra, w chwili początkowej nie jest splątana z częścią położeniową. Na tej podstawie równanie Schrödingera

dla samego komponentu spinowego wyraża się w postaci (E.3.7):

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\chi(t)\rangle = H_\chi |\chi(t)\rangle, \quad (6.3)$$

gdzie efektywny Hamiltonian to

$$H_\chi = -\frac{2\mu_0}{3} |\psi_s(0)|^2 \vec{\mu}_n \cdot \vec{\mu}_e. \quad (6.4)$$

Jest to tak zwany wkład Fermiego do oddziaływania nadsubtelnego, który dotyczy tylko orbitali z niezerową gęstością prawdopodobieństwa w położeniu jądra atomowego (tzn. kiedy relatywna odległość $r = 0$).

Mierzona obserwabla i warunki początkowe

W zaproponowanym modelu korelacje w czasie, z których skonstruowana jest funkcja K_3 , dotyczą pomiarów rzutu spinu pojedynczego elektronu walencyjnego w atomie. Należy podkreślić, że pomiar działający tylko na stopnie swobody elektronu (a nie jądra atomowego) jest możliwy do przeprowadzenia w rzeczywistym eksperymencie ze względu na zdecydowaną różnicę mas pomiędzy elektronem, a jądrem, która w konsekwencji przekłada się na wartość momentu magnetycznego i sprzężenia z zewnętrznym polem magnetycznym (w wyniku pomiaru typu Sterna–Gerlacha). W formalizmie teoretycznym taki pomiar rzutowy reprezentowany jest przez operator (E.3.11)¹:

$$P_\pm = |\pm \vec{r}_m\rangle \langle \pm \vec{r}_m| \otimes I, \quad (6.5)$$

gdzie stan $|\vec{r}_m\rangle$ z przestrzeni elektronu \mathcal{H}_S jest stanem własnym:

$$(\vec{r}_m \cdot \vec{\sigma}) |\pm \vec{r}_m\rangle = \pm 1 |\pm \vec{r}_m\rangle \quad (6.6)$$

oraz \vec{r}_m jest dowolnym wektorem jednostkowym z rzeczywistej przestrzeni trójwymiarowej. Innymi słowy operator rzutowy (6.5) sprowadza się do pomiaru obserwabli (3.2):

$$Q = \vec{r}_m \cdot \vec{\sigma} = |+\vec{r}_m\rangle \langle +\vec{r}_m| - |-\vec{r}_m\rangle \langle -\vec{r}_m| \quad (6.7)$$

działającej w przestrzeni \mathcal{H}_S .

¹Należy zwrócić uwagę, że w artykule (A.3) zastosowano notację Π_\pm zamiast P_\pm . W celu zachowania spójności w tym przewodniku, konsekwentnie stosowana jest notacja, w której $P_\pm = \Pi_\pm \otimes I$ jest operatorem działającym w przestrzeni $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E$ (zobacz Rozdział 3).

Jako warunki początkowe układu jądro-elektron przyjęto następujący stan produktowy:

$$\rho(0) = |\vec{r}_e\rangle \langle \vec{r}_e| \otimes |\vec{r}_n, I, m\rangle \langle \vec{r}_n, I, m|, \quad (6.8)$$

gdzie $|\vec{r}_e\rangle$ to wektor spełniający równanie (6.6) w kierunku \vec{r}_e i z wartością własną $+1$ oraz $|\vec{r}_n, I, m\rangle$ to analogiczny stan własny jądra atomowego w kierunku \vec{r}_n o całkowitym spinie I i wartości własnej m . Podstawowymi parametrami omawianego układu otwartego jest wartość I i m , które definiują różne otoczenia \mathcal{H}_E , z którymi sprzęga się mierzony układ \mathcal{H}_S .

Ze względu na sferyczną symetrię Hamiltonianu H_ξ (6.4), w rozważanym eksperymencie znaczenie mają tylko względne orientacje trzech następujących kierunków: kierunek pomiaru \vec{r}_m , kierunek początkowej orientacji spinu elektronu \vec{r}_e oraz kierunek początkowej orientacji spinu jądra \vec{r}_n . Na tej podstawie zostały zdefiniowane trzy podstawowe przypadki:

- a) wektor \vec{r}_m prostopadły do wektora \vec{r}_n przy dowolnej orientacji wektora \vec{r}_e ,
- b) wektor \vec{r}_m równoległy do wektora \vec{r}_n i prostopadły do wektora \vec{r}_e ,
- c) wszystkie wektory \vec{r}_m , \vec{r}_n i \vec{r}_e są równoległe.

6.3 Wyniki

Pomimo zdecydowanego uproszczenia postaci efektywnego Hamiltonianu H_ξ problem i tak jest zbyt skomplikowany, aby rozwiązać go przy pomocy metod analitycznych. Z tego powodu wszystkie poniżej przedstawione wyniki zostały uzyskane za pomocą obliczeń numerycznych, poprzez aproksymację operatora ewolucji w czasie w postaci szeregu.

Pierwszym wynikiem uzyskanym w toku analizy jest określenie przedziału okresowości T funkcji K_3 , która w analizowanym modelu jest periodyczna. Wartość T (dla dowolnej orientacji wektorów \vec{r}_m , \vec{r}_n i \vec{r}_e) wyraża się w postaci:

$$T = \frac{24\pi m_e m_n}{(2I + 1)Z\mu_0 g_e g_n |\psi_s(0)|^2 e^2 \hbar}. \quad (6.9)$$

Warto zwrócić uwagę, że pomiar okresu T , na podstawie powyższej relacji, może posłużyć do wyznaczenia wartości prawdopodobieństwa obserwacji elektronu w położeniu

jądra atomowego $|\psi_s(0)|^2$, ponieważ wszystkie pozostałe parametry są dobrze wyznaczonymi wielkościami. W szczególności relacja ta może być interesująca jeśli w eksperymencie będą rozważane wyższe poziomy wzbudzone.

Wyznaczona numerycznie funkcja K_3 dla schematu pomiarowego *a*) i różnych wartości I oraz m została przedstawiona na rysunku (R.3.1). Najważniejszy wniosek, który wynika z tej prezentacji to fakt, że łamanie nierówności wzrasta wraz z całkowitym spinem I oraz z wartością bezwzględną rzutu na oś kwantyzacji $|m|$. Ponieważ wartość spinu trwałych izotopów jąder z pierwszej grupy rośnie w dół (zobacz Tabela 1 na końcu artykułu (A.3)), oznacza to, że dla pomiaru *a*) pierwiastki pochodzące z najniższych okresów łańcucha LGI najmocniej. Jest to ciekawa obserwacja ponieważ pierwiastki te mają jednocześnie największe rozmiary², co jest motywacją do wykorzystania powyższego układu do testów makroskopowego realizmu. Otrzymane wartości funkcji K_3 w tym schemacie dodatkowo nie zależą w żaden sposób od warunków początkowych elektronu.

Dla schematu pomiarowego *b*) obserwuje się tendencje odwrotną³. Oznacza to, że wraz ze wzrastającą wartością I lub $|m|$, korelator K_3 wykazuje coraz mniejszą maksymalną amplitudę (zobacz (R.3.2)). Dodatkowo suma obu funkcji ze schematu *a*) i *b*) dla tych samych wartości I i $|m|$ jest w przybliżeniu stała. Największe odstępstwo prezentuje przypadek, gdy $I = 1/2$, co zostało zobrazowane na rysunku (R.3.3). Powoduje to, że im większe jest łamanie LGI w pewnym wyróżnionym kierunku dla ustalonej wartości spinu jądra, tym mniejsze ono będzie w kierunku pomiaru prostopadłym do tego pierwszego.

Trzecia procedura pomiarowa *c*), w której wszystkie kierunki \vec{r}_e, \vec{r}_n oraz \vec{r}_m są równoległe, wykazuje trywialne łamanie nierówności LGI w postaci stałej funkcji $K_3 = 1$. Otrzymana postać korelatora K_3 dla pomiarów *c*) oraz *a*) wskazuje tym samym jakoby spin jądra w przypadku granicznym, gdy $I \rightarrow \infty$, zachowywał się jak stałe pole magnetyczne zorientowane zgodnie z wektorem \vec{r}_n . Jeśli jest ono równoległe do spinu elektronu, prowadzi do wartości $K_3 = 1$, a jeśli prostopadłe – do łamania zgodnego z ewolucją (2.15).

W prezentowanym artykule (A.3) zaproponowano również miarę łamania nierówności LGI dla przypadku periodycznych funkcji K_3 . Miara ta jest liczona jako pole powierzchni korelatora K_3 ponad wartością ograniczającą zachowanie makrorealistyczne (tzn. dla $K_3 > 1$) i odpowiednio przeskalowana przez okres funkcji T (E.3.19-20). Motywacją do

²W szczególności atomy cezu mają największe orbitale walencyjne w całym układzie okresowym.

³Podobnie jak w modelu poprzednim, zobacz Rozdział 5

przyjęcia powyższej definicji jest fakt, że do scharakteryzowania miary łamania nierówności LGI przez układ, istotna jest zarówno wartość $K_3 > 1$ jaką ten układ przyjmuje w stanie nieklasycznym oraz to, jak długo w nim pozostaje. Tak zdefiniowana miara została obliczona dla różnych wartości I oraz $|m|$ i przedstawiona na rysunku (R.3.4).

6.4 Podsumowanie

Wyznaczone wartości funkcji K_3 dla przypadku oddziaływania nadsubtelnego ponownie ujawniają nietrywialne zachowanie korelacji w czasie w zależności od wybranej bazy pomiarowej. Zaprezentowany przykład jest o tyle istotny w dziedzinie nieklasycznych korelacji w czasie, że teoretyczne przewidywania są – co do zasady – weryfikowalne w pomiarze idealnie negatywnym (wykluczającym bezpośrednią inwazyjność pomiaru) oraz mogą być wykonane dla pseudo-makroskopowych obiektów. W szczególności model ten jest słuszny dla wszystkich atomów pierwszej grupy układu okresowego, co pozwalałoby wykonać eksperyment dla obiektów o różnych rozmiarach przestrzennych. Ponadto jego stosowalność obejmuje również stany wzbudzone, co potencjalnie może prowadzić do testów makrorealizmu na atomach Rydberga.

Rozdział 7

(A.4) Łamanie nierówności w przypadku kwantowo-klasycznych hybryd

7.1 Wstęp

Ostatnim z modeli prezentowanych w tej rozprawie jest ponownie układ sprzężony z otoczeniem w wyniku oddziaływa typu spin-spin. W tym przypadku jednym z kluczowych aspektów modelu jest zastosowanie odpowiedniego skalowania¹ operatora spinu układu traktowanego jako otoczenie, stosowanego w metodach semi-klasycznych. Tak zdefiniowany model określono mianem kwantowo-klasycznej hybrydy, która reprezentowana jest przez w pełni kwantowy układ o dwóch stanach S i sprzężone z nim semi-klasyczne otoczenie E . W odróżnieniu od modelu (A.2), w którym dyskutowano postać korelacji w czasie jedynie dla autonomicznego układu semi-klasycznego (zobacz Rozdział 5), w tym przypadku skupiono się raczej na wpływie wspomnianego układu na korelacje układu w pełni kwantowego. Poza tym w artykule zaprezentowano zasadniczą różnicę pomiędzy sprzężeniem w jednym i trzech wymiarach.

¹Wykorzystanego również w artykule (A.2), zobacz Rozdział 5.

7.2 Model

Sprężenie z otoczeniem

W rozważanym modelu dynamika jest generowana przez Hamiltonian (E.4.3,6):

$$H_1 = \alpha \sigma_z J_z / j \quad (7.1)$$

oraz

$$H_3 = \alpha \vec{\sigma} \cdot \vec{J}, \quad (7.2)$$

gdzie α to stała sprzężenia, $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ to wektor złożony z macierzy Pauliego oraz $\vec{J} = \frac{1}{j}(J_x, J_y, J_z)$ to odpowiednio przeskalowany wektor, gdzie J_i to operatory momentu pędu o wartości całkowitej j . W dalszej części przyjmuje się, że stany $|j, m\rangle$ to stany własne operatora J_z z wartością własną m . Hamiltonian H_1 opisuje podłużne sprzężenie układu z otoczeniem w jednym wyróżnionym kierunku, natomiast H_3 przedstawia sferycznie symetryczne sprzężenie trójwymiarowe.

W semi-klasycznych metodach stosowanych w kwantowym chaosie specjalne skalowanie $1/j$, w granicy $j \rightarrow \infty$, sprawia, że wektor operatorów \vec{J} może zostać zastąpiony klasycznym wektorem jednostkowym (B.4.8, B.2.33).

Mierzona obserwabla i warunki początkowe

W proponowanym modelu przyjęto operatory rzutowe mierzonej obserwabli Q (3.2) w postaci:

$$\Pi_{\pm} = |\pm x\rangle \langle \pm x|, \quad (7.3)$$

gdzie $|\pm x\rangle$ to stany własne operatora σ_x z wartościami własnymi odpowiednio ± 1 , tak że operator działający w przestrzeni $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E$ wyraża się (E.4.4)²:

$$P_{\pm} = \Pi_{\pm} \otimes I. \quad (7.4)$$

Natomiast warunki początkowe zadano jako:

$$\rho(0) = | +x \rangle \langle +x | \otimes | j, m \rangle \langle j, m |. \quad (7.5)$$

²Zobacz przypis 1 w Rozdziale 6.

Podobnie jak w modelu (A.3) wartości j i m charakteryzują otoczenie \mathcal{H}_E , z którym sprzężony jest układ mierzony \mathcal{H}_S .

7.3 Wyniki

Sprzężenie jednowymiarowe

Wartość korelatora K_3 dla przypadku sprzężenia w jednym kierunku H_1 można obliczyć w sposób analityczny, co prowadzi do postaci (E.4.7):

$$K_3 = 2 \cos(\omega\tau) - \cos(\omega\tau), \quad (7.6)$$

gdzie $\omega = 2\alpha m/j$. Z powyższego równania widać, że sprzężenie jednowymiarowe nie wpływa efektywnie na kształt funkcji K_3 (względem ewolucji swobodnej (2.15)), a tylko na jej okres $T_1 = \pi j/\alpha m$. Oznacza to, że przy wzrastającej wartości stosunku j/m okres korelatora K_3 wydłuża się, co powoduje, że układ może dłużej pozostawać w stanie wykazującym nieklasyczne korelacje. Przy przejściu granicznym $j \rightarrow \infty$ i ustalonej wartości m , układ efektywnie dąży do postaci $K_3 = 1$. Podobnie funkcja K_3 jest dokładnie równa jedności, dla dowolnego j i $m = 0$. Natomiast kiedy $m = j$, czyli otoczenia znajduje się w stanie o maksymalnym dostępnym momencie pędu, wtedy funkcja K_3 jest niezależna od j , co jest analogiczne do zachowania korelatora LGI obliczonego dla sprzężenia podłużnego w artykule (A.2) (zobacz Rozdział 5).

Sprzężenie trójwymiarowe

Rozwiązanie modelu trójwymiarowego wymaga wykorzystania metod numerycznych. W tym przypadku (podobnie jak w modelu (A.3)) zastosowana metoda polega na przybliżeniu operatora ewolucji w czasie w postaci szeregu. Wykonując szereg numerycznych symulacji, dla różnych wartości j i m , została wyznaczona wartość okresu funkcji dla tego sprzężenia równa (E.4.8):

$$T_3 = \frac{2\pi j}{\alpha(2j+1)}. \quad (7.7)$$

Okres ten jest wolno rosnącą funkcją względem wartości j i nie zależy w ogóle od m . Rozważając graniczne przejście, dla którego $j \rightarrow \infty$ otrzymujemy:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} T_3 = \frac{\pi}{\alpha}. \quad (7.8)$$

Zauważmy przede wszystkim, że powyższa graniczna wartość (maksymalna dla sprzężenia trójwymiarowego) jest jednocześnie najkrótszym okresem obserwowanym dla sprzężenia jednowymiarowego ($m = 1$). Warto zwrócić uwagę również, że analizowany Hamiltonian bez skalowania $1/j$ prowadzi do okresu T_3 , który zanika do zera jak $1/j$. Oznacza to kolejny raz, że skalowanie $1/j$ w pewien sposób stabilizuje zachowanie funkcji K_3 , która bez niego wraz ze wzrastającą wartością j wykazywałaby coraz mocniej oscylujące łamanie LGI, mierzalne tylko na bardzo krótkich skalach czasowych.

Najbardziej interesującym aspektem tego sprzężenia jest jednak fakt, że amplituda K_3 jest zależna od wartości j i m . Relacja ta została przedstawiona na wykresie (R.4.1). Wyznaczona postać korelatora K_3 jest równoważna funkcji zaprezentowanej w artykule (A.3) ze względu na analogiczną postać Hamiltonianu. Ponownie więc obserwujemy tym większe łamanie LGI, im większa jest wartość całkowitego momentu pędu j i bezwzględna wartość rzutu na oś kwantyzacji $|m|$. W tym miejscu przedyskutowano również zależność wartości maksymalnej K_3 od liczb kwantowych j i $|m|$ przedstawioną na wykresie (R.4.2). Obserwujemy przede wszystkim, że dla $m = 0$ układ o dowolnym całkowitym momencie pędu j osiąga taką samą wartość maksymalną. Degeneracja ta zostaje zniesiona wraz ze wzrostem liczby kwantowej $|m|$. Z grafu (R.4.2) wnioskujemy ponadto, że dla ustalonej wartości $|m|$, to układ o najmniejszym momencie pędu j łamie nierówności najbardziej.

7.4 Podsumowanie

Otrzymane funkcje K_3 dla prostego oddziaływania typu spin-spin wraz ze skalowaniem opartym na semi-klasycznych metodach kolejny raz przedstawiają interesujące i nieintuicyjne zachowanie. Przypadek jedno- i trójwymiarowy zdecydowanie ujawnia różny „zasób” nieklasycznych korelacji mierzonych dla tej samej obserwacji w czasie. Po pierwsze, amplituda korelatora w przypadku jednowymiarowym jest niezależna od wartości momentu pędu otoczenia (lub równoważnie rozmiaru przestrzeni stanów), co nie jest prawdą w przypadku sprzężenia trójwymiarowego. Po drugie, różnica ujawnia się także w analizie periodyczności funkcji K_3 , gdzie na przykład okres dla układów trójwymiarowych w granicy ($j \rightarrow \infty$) dąży do najmniejszej obserwowanej wartości dla układów jednowymiarowych. Ponadto analiza maksymalnej wartości korelatora LGI dla sprzężenia trójwymiarowego w nietrywialny sposób zależy również od rzutu spinu na oś kwantyzacji m . Wszystkie powyższe obserwacje mogą przyczynić się do lepszego

planowania testów makrorealizmu poprzez sterowanie otoczeniem (czyli wartościami j i m), w taki sposób, aby uzyskać jak najbardziej wydajne łamanie nierówności.

Violation of Leggett–Garg inequalities for quantum–classical hybrids

Marcin Łobejko¹ and Jerzy Dajka^{1,2}

¹Institute of Physics, University of Silesia, Katowice, Poland

²Silesian Center for Education and Interdisciplinary Research, University of Silesia, Chorzów, Poland

Abstract. Violation of Leggett–Garg inequalities can serve as a signature of a failure of (macroscopic) realism. We investigate violation of the simplest Leggett–Garg inequality for a qubit coupled to an integer j spin (angular momentum). Such a system effectively reveals quantum–classical hybrid behavior in the limit of large j values. We show that a maximal violation of the Leggett–Garg inequality is larger for quantum–classical hybrids than for fully quantum systems.

1. Introduction

Discoveries of entanglement [1] and other types of quantum correlations like quantum discord [2] play essential role in a way of seeing and understanding of the microscopic and macroscopic reality. Well known violation of Bell inequalities [3] is the best evidence of the existence of such spatial correlations which cannot be understood in terms of some "classical" local hidden variables.

Moreover, recently also temporal quantum correlations are studied. In analogy to the spatial correlations quantified by the Bell inequalities [3] one predicts and observes violations of the so called Leggett–Garg inequalities (LGI) [4]. LGI are derived under two assumptions: *macroscopic realism* and *non-invasive measurability* of the system. The second requirement is subtle and often leads to conceptual difficulties related to the clumsiness loophole [4]. The first requirement, the macroscopicity, also is often abandoned as the LGI are interesting by its own also in microscopic systems [5].

It was shown that violation of LGI by free spin particle with dichotomous measurement increases with respect to absolute value of spin [5]. It is an interesting fact since systems with higher spin are naturally considered as more macroscopic (like atomic nucleus) and hence probably 'more realistic'. In this paper we consider a simple composite system consisting of a qubit coupled to an integer spin (angular momentum) exhibiting well defined classical limit. In other words, we consider quantum–classical hybrid system with a qubit as a quantum part. It is known that the spatial correlations (entanglement) in quantum–classical hybrid systems can exhibit unexpected properties [6, 7]. Here we show that it is also the case for LGIs which are more violated by hybrid systems than by those which operate in fully quantum regime.



Content from this work may be used under the terms of the [Creative Commons Attribution 3.0 licence](https://creativecommons.org/licenses/by/3.0/). Any further distribution of this work must maintain attribution to the author(s) and the title of the work, journal citation and DOI.

Published under licence by IOP Publishing Ltd

2. Model

Leggett–Garg inequalities are constructed from time correlation functions of a series of measurements of some dichotomous variable carried on a considered system. We study the simplest among LGIs [4] when the system undergoes the measurement only thrice:

$$K_3 := C_{21} + C_{32} - C_{31} \leq 1 \quad (1)$$

where

$$C_{\beta\alpha} = \sum_{m,l} q_m q_l \text{Tr} \left[\Pi_m U_{\beta\alpha} \Pi_l U_{\alpha 0} \rho_0 U_{\alpha 0}^\dagger \Pi_l U_{\beta\alpha}^\dagger \right] \quad (2)$$

is the time correlation function for some dichotomous variable Q and $q_l, q_m = \pm 1$ represent (projective) measurement outputs given by eigenvalues of the observable corresponding to Q and associated with a set of projectors Π_l . Here ρ_0 is the initial state of the system and $U_{\beta\alpha} = U(t_\beta, t_\alpha) = e^{-i(t_\beta - t_\alpha)H}$ is the unitary time-evolution operator with the Hamiltonian H . For non-invasive measurement of Q , violation of the LGI in Eq.(1) indicates possible failure of the (macroscopic) realism.

For our purposes we assume a simple spin-orbit type of interaction:

$$H = \alpha \vec{\sigma} \cdot \vec{J} \quad (3)$$

typical for Hydrogen-like atomic objects. Here $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ is a vector of Pauli matrices acting on a qubit subspace, $\vec{J} = \frac{1}{j}(J_x, J_y, J_z)$ is a vector of an integer spin operator ($j = 1, 2, \dots$) and α is a coupling constant. In the limit of $j \rightarrow \infty$ there is a well defined classical limit of the integer spin part of the system [8]. As the qubit part, given by $\vec{\sigma}$, remains quantum, the total system effectively mimics in large j limit quantum-classical hybrid. Let us notice that there are alternative approaches for studying quantum-classical hybrid systems [9, 10].

For the quantity which is measured to obtain the correlation function Eq.(2) we set an x -component of the qubit spin (i.e. $m, l = \pm 1$ in Eq.(2)). Such an observable is represented by a pair of projectors

$$\Pi_\pm = |\pm x\rangle \langle \pm x| \otimes \mathcal{I} \quad (4)$$

where $|\pm x\rangle$ is an eigenstate of the x -component of σ_x and the identity \mathcal{I} acts on the integer spin part of the system.

3. Results

In the absence of qubit–spin coupling ($\alpha = 0$) there is no time evolution, always $K_3 = 1$ and the LGI Eq.(1) is never violated. For $\alpha > 0$ let us consider the following initial preparation of the system:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |m\rangle \quad (5)$$

where the states $|0\rangle$ and $|1\rangle$ are the eigenstates of σ_z operator (with eigenvalues $+1$ and -1) and $|m\rangle$ is one of eigenstates of J_z operator, i.e. $J_z |m\rangle = m |m\rangle$.

In the following we assume that the measurements required to calculate K_3 in Eq.(1) appearing in Eq.(2) are equally separated in time i.e. $t_1 = \tau, t_2 = 2\tau$ and $t_3 = 3\tau$.

3.1. One-dimension coupling

Let us first consider a simplified analytically solvable model with interaction restricted only to one spin direction:

$$H = \frac{\alpha}{j} \sigma_z J_z \quad (6)$$

For the initial state (5) the K_3 function reads as follows:

$$K_3 = 2 \cos(\omega\tau) - \cos(2\omega\tau) \quad (7)$$

where $\omega = 2\alpha m/j$ and the period of K_3 function is $T_1 = j\pi/\alpha m$ where the subscript '1' indicates one-dimensional interaction Eq.(6).

Any changes of coupling strength α and integer spin value j affects just the period of the K_3 function. In the (semi)classical limit of large j , the smaller are the values of m of the integer spin projection on quantization axis, the longer is the period of K_3 oscillation. Moreover, with increasing m the period of K_3 function becomes minimal (given by $T_1 = \pi/\alpha$) and independent on the dimension of the Hilbert space. It holds true for all initial preparations of the form Eq.(5) with $|m = j\rangle$. One can conclude that the interaction between a qubit and a (semi)classical object results [for small m in Eq.(5)] in stretching of time periods of the LGI violation. In particular, an amplitude of the K_3 function remain the same with an exception of the initial state Eq.(5) with $|m = 0\rangle$ when $K_3 \equiv 1$.

3.2. Three-dimension coupling

In order to examine violation of the LGI of the system evolving according to the full Hamiltonian Eq. (3) we applied numeric simulations using Python toolbox QuTiP [11]. As in simplified one-dimensional model Eq.(6), the multiplication constant in a front of Hamiltonian Eq.(3) representing a strength of an interaction affects only the period of the K_3 function (and not its amplitude). The period of K_3 reads as follows:

$$T_3 = \frac{2\pi j}{\alpha N} \quad (8)$$

where $N = 2j + 1$ is the dimension of the spin j Hilbert subspace. In the classical limit we obtain:

$$T_3^c := \lim_{j \rightarrow \infty} T_3 = \frac{\pi}{\alpha} \quad (9)$$

i.e. the same value as the minimal period in the case one-dimension coupling T_1 . However, in the three dimensional case, the time period of the quantum–classical hybrid system Eq.(9) is maximal i.e. $T_3^c \geq T_3$. Moreover, in this case, the T_3 –period does not depend on m in the initial state Eq.(5) and hardly increases with respect to the j value.

Let us notice the *qualitative* difference between one– and three–dimensional case. In the later one not only the period of K_3 function but also its amplitude changes with respect to the quantum numbers m and j in the initial state Eq.(5) as in Fig.1(a) and Fig.1(b).

Particularly interesting is of *maximal violation* of the LGI when the j –component of the system approaches classical limit i.e. when the qubit–spin system starts to be a quantum–classical hybrid. Maximum of the LGI violation for different values of j and initial preparations is presented in Fig.2. One can infer that the LGI violation is stronger in the system interacting with higher spin values i.e. for quantum–classical hybrids when the LGI violation approaches its maximal possible value $K_3 = 3/2$ [4].

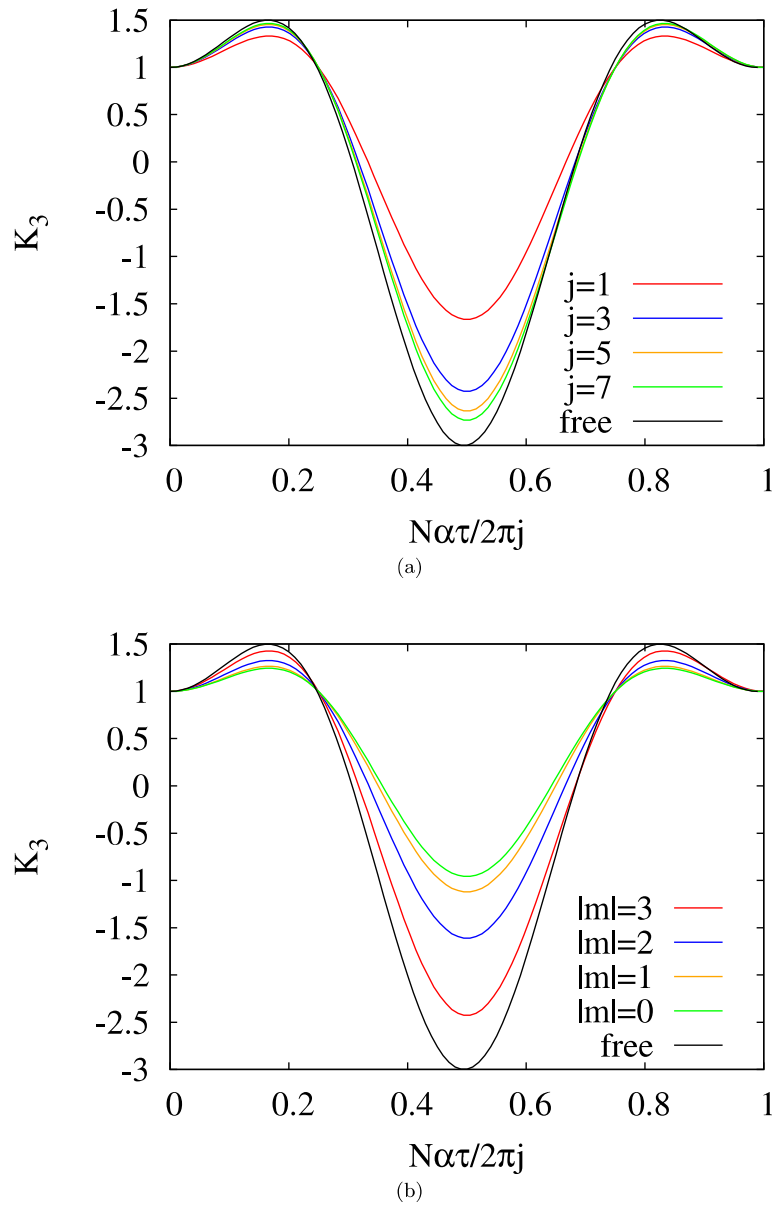


Figure 1. (Color online) K_3 function for a qubit interacting with integer j spin in the initial state $|m\rangle$ in Eq.(5): (a) for different values of j and $m = j$; (b) for different values of m for fixed $j = 3$. Time interval τ between measurements is rescaled with respect to the period T_3 in Eq.(8).

4. Conclusion

Violation of the Leggett–Garg inequalities, as in the case of Bell inequalities [3], provide an insight into very counter–intuitive properties of Nature. In our work we investigate a composite

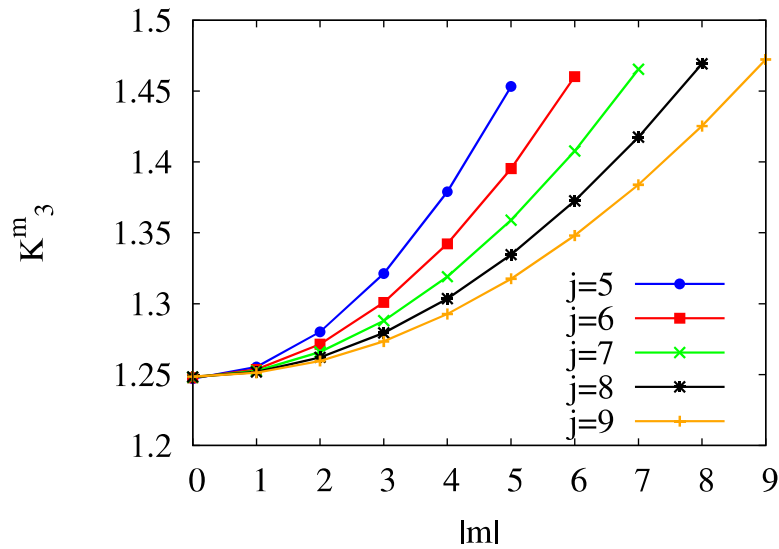


Figure 2. (Color online) Maximal value K_3^m of K_3 function of the qubit coupled to integer spin j according to Eq.(3) prepared in the state Eq.(5) versus m and for different values of j and initial state Eq.(5).

system consisting of a qubit, a basic building block for quantum information, and the integer spin, angular momentum, applicable in various models of atomic physics. We considered dichotomous measurement of the x -component of the qubit corresponding to projecting the system on eigenstates of σ_x operator tensorized with identity acting on integer spin system. Our aim was to study violation of the LGIs in the limit of large j when the composite qubit–spin system can mimic quantum–classical hybrid. For the simplest one–dimensional qubit–spin coupling we obtain analytic results for the K_3 function with a period (but not an amplitude) changing with increasing j . In general three–dimensional case, requiring numerical treatment, the amplitude of the K_3 function became j -dependent in a rather counter–intuitive fashion: maximal violation of the LGI occurring for the quantum–classical hybrid system is *larger* than in the fully quantum systems with small values of j . In particular, for $j \rightarrow \infty$ $K_3 \rightarrow 3/2$ i.e. its value approaches largest possible value.

Since systems with high spin values are naturally considered as more macroscopic we show that, counter–intuitively, microscopic qubit violates LGI more when it interacts with more macroscopic object.

Acknowledgments

The work has been supported by the NCN project DEC-2013/09/B/ST3/01659 (JD) and the Forszt project co-financed by EU from the European Social Fund (ML).

References

- [1] Horodecki R et al. 2009 *Rev. Mod. Phys.* **81** 865
- [2] Modi K et al. 2012 *Rev. Mod. Phys.* **84** 1655
- [3] Brunner N et al. 2014 *Rev. Mod. Phys.* **86** 839
- [4] Emary C, Lambert N, and Nori F 2014 *Rep. Prog. Phys.* **77** 016001

- [5] Budroni C and Emary C 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 050401
- [6] Fratino L, Lampo A, and Elze H-T 2014 *Phys. Scr.* **2014** 014005
- [7] Dajka J 2014 *Int. J. Theor. Phys.* **53** 870
- [8] Haake F 1991 *Quantum Signatures of Chaos* (Wiley)
- [9] Elze H-T 2012 *Phys. Rev. A* **85** 052109
- [10] Lampo A, Fratino L, and Elze H-T 2014 *Phys. Rev. A* **90** 042120
- [11] Johansson J R, Nation P D, and Nori F 2013 *Comp. Phys. Comm.* **184** 1234

Rozdział 8

Podsumowanie

Badania przedstawione w artykułach (A.1-4) dotyczą analizy łamania LGI dla układów otwartych. Zaprezentowane wyniki ujawniają nietrywialny wpływ otoczenia na „zasób” nieklasycznych korelacji obecnych w układach kwantowych. Z jednej strony otrzymane rezultaty mogą posłużyć do projektowania eksperymentów testujących makrorealizm, w taki sposób aby zminimalizować negatywny wpływ otoczenia. Z drugiej strony badania te otwierają nowe możliwości sterowania nieklasycznymi korelacjami w układzie za sprawą otoczenia, z którym oddziałuje. Otrzymane rezultaty dostarczają również wglądu w zrozumienie układów kwantowych na poziomie fundamentalnym, a w szczególności procesu przejścia od domeny kwantowej do klasycznej.

Potencjalny wpływ na eksperymentalne testy nierówności LGI wynika wprost z rezultatów otrzymanych w badaniach (A.1-3). W pierwszym artykule (A.1) zaprezentowano model układu sprzężonego z otoczeniem termicznym, które prowadzi do nieuchronnej dyssypacji i/lub dekoherencji. Jest to niezwykle istotny paradygmat ze względu na to, że dowolny rzeczywisty układ ulega nieuchronnie powyższym procesom, co m.in. jest jedną z głównych przyczyn problemu konstrukcji efektywnego komputera kwantowego. W kontekście informacji i informatyki kwantowej wykazano [13–15], że łamanie nierówności LGI w tych dziedzinach odgrywa istotną rolę. Z tego powodu predykcja tłumienia nieklasycznych korelacji w czasie jest ważnym elementem w projektowaniu odpowiednich protokołów przetwarzania informacji w sposób kwantowy. Ponadto badania (A.1) ujawniły niespodziewany efekt niezależności funkcji K_3 od pewnych aspektów otoczenia przy odpowiednim wyborze mierzonej obserwacji. W szczególności korelator LGI można w ten sposób uczynić „nieczułym” na proces dyssypacji, dekoherencji lub temperaturę termostatu. Po pierwsze, dostarcza to wiedzy potrzebnej do projektowania

właściwego eksperymentu, który jest w stanie zminimalizować destruktywny wpływ na korelacje nieklasyczne. Po drugie, wykonywanie pomiarów w różnych bazach ujawnia inne elementy otoczenia, co pozwala w łatwy sposób badać otoczenie samo w sobie.

Podobnej wiedzy na temat tłumienia korelacji nieklasycznych dostarczają badania (A.2). W tym przypadku modelowanie zewnętrznych stopni swobody opiera się na wykorzystaniu klasycznych procesów stochastycznych w kwantowej dynamice. Otrzymane ściśle analityczne wyniki potwierdziły, że losowa dynamika generowana przez klasyczny szum w kontekście LGI jest równoważna procesowi dekoherencji, której ulega układ w wyniku słabego sprzężenia z termostatem (A.1). W tym podejściu ponadto wpływ szumu, który w ogólności prowadzi do wykładniczego zaniku korelacji, został przeanalizowany dla układów o różnym rozmiarze przestrzeni stanów.

Trzeci z modeli (A.3) odnosi się natomiast do fizycznego układu atomów z pierwszej grupy układu okresowego łamiących LGI w wyniku oddziaływania nadsubtelnego. Eksperyment typu Sterna–Gerlacha – co do zasady – jest w stanie zmierzyć otrzymane wartości korelatora LGI w sposób idealnie negatywny, co umożliwiłoby wykorzystanie układu do testów makrorealizmu. Co więcej przewidywania teoretyczne przedstawiają nieintuicyjny obraz, w którym układy „bardziej makroskopowe” wykazują większe łamanie LGI. Poza tym wyniki badań pokazują, że łamanie nierówności można uczynić niezależnym od poziomu wzbudzenia atomu, co potencjalnie daje możliwość testów przy użyciu pseudo-makroskopowych atomów Rydberga.

Dla dynamiki generowanej algebrą operatorów momentu pędu (A.2-4) wykazano, że nieklasyczne korelacje mogą zarówno wzrastać lub maleć wraz z rozmiarem dostępnej przestrzeni stanów. Efekt ten ujawnił się przy wzroście rozmiaru układu mierzonego (A.2), jak i układu z nim sprzężonego (A.3-4). W pierwszym przypadku, gdzie rozważano układ autonomiczny, którego dynamika jest perturbowana poprzez biały szum, zmiana charakteru „zasobu” nieklasycznych korelacji od rozmiaru przestrzeni stanów wynikała z kierunku sprzężenia z losową siłą. W szczególności sprzężenie podłużne (typu defazującego) prowadzi do wykładniczego zaniku korelacji wraz ze wzrostem przestrzeni stanów, natomiast sprzężenie poprzeczne (typu dyssypującego), przeciwnie – prowadzi do ich wzrostu. Podobnie dla modelu (A.3) korelacje obecne w qubicie (spinie elektronu) albo wzrastają, albo maleją wraz z rozmiarem przestrzeni stanów jądra, w zależności od przyjętego kierunku pomiaru.

Ostatnim z elementów badań nierówności LGI w tej rozprawie była analiza wpływu specjalnego skalowania operatorów momentu pędu stosowanego w metodach semi-klasycznych.

Skalowanie to jest stosowane w celu zapewniania granicy klasycznej, kiedy wartość momentu pędu dąży do nieskończoności (skali makroskopowej). Podejście to zostało wykorzystane w modelu (A.2) i (A.4). Otrzymane wyniki przedstawiają interesujący wpływ skalowania na nieklasyczne korelacje w czasie, które stabilizuje łamanie nierówności LGI. W modelu (A.2) skalowanie dla sprzężenia podłużnego sprawia, że korelator jest w ogóle niezależny od wartości momentu pędu, natomiast bez skalowania – wykładniczo zanika wraz z jego kwadratem. Podobnie w modelu kwantowo-klasycznej hybrydy (A.4) skalowanie ponownie wywiera stabilizujący wpływ, tym razem jednak na okres funkcji K_3 . Innym zaobserwowanym efektem skalowania w sprzężeniu poprzecznym diskutowanym w modelu (A.2) jest zniesienie degeneracji maksymalnej wartości korelatora dla różnych wartości momentu pędu w obszarze małych intensywności szumu.

Powyższa analiza ujawnia złożoność problemu badania nieklasycznych korelacji dla układów otwartych. W przeciwieństwie do dobrze poznanych układów izolowanych, układy otwarte zdecydowanie wymagają dalszego studiowania w celu ustalenia dokładnego wpływu otoczenia na obecność nieklasycznych korelacji w czasie jakie mogą wykazywać układy kwantowe. Badania przeprowadzone w niniejszej rozprawie doktorskiej są jednym z kroków poczynionych w tej dziedzinie.

Oświadczenie współautora (A.1)

prof. zw. dr hab. Jerzy Łuczka
Instytut Fizyki
Uniwersytet Śląski w Katowicach
Zakład Fizyki Teoretycznej
ul. 75 Pułku Piechoty 1a, 41-500 Chorzów

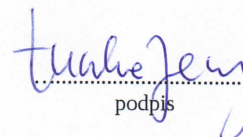
Chorzów, 7.05.2018

OŚWIADCZENIE

Oświadczam, że w pracy:

(A.1) M. Łobejko, J. Łuczka, J. Dajka, Leggett-Garg inequality for qubits coupled to thermal environment, Phys. Rev. A 91, 042113. (2015)

mój udział polegał na dyskusji wyników oraz przygotowaniu części manuskryptu.


.....
podpis

Oświadczenie współautora (A.2)

prof. zw. dr hab. Jerzy Łuczka
Instytut Fizyki
Uniwersytet Śląski w Katowicach
Zakład Fizyki Teoretycznej
ul. 75 Pułku Piechoty 1a, 41-500 Chorzów

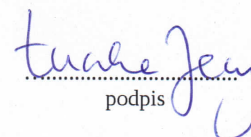
Chorzów, 7.05.2018

OŚWIADCZENIE

Oświadczam, że w pracy:

(A.2) J. Dajka, M. Łobejko, J. Łuczka, Leggett-Garg inequalities for a quantum top affected by classical noise, Quantum Inf Process (2016) 15: 4911.

mój udział polegał na dyskusji wyników, merytorycznym opisie modelu białego szumu oraz przygotowaniu części manuskryptu.


.....
podpis

Bibliografia

- [1] A. J. Leggett and Anupam Garg. Quantum mechanics versus macroscopic realism: Is the flux there when nobody looks? *Phys. Rev. Lett.*, 54:857–860, Mar 1985.
- [2] J. S. Bell. On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox. *Physics*, 1:195–200, 1964.
- [3] A J Leggett. Testing the limits of quantum mechanics: motivation, state of play, prospects. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 14(15):R415, 2002.
- [4] A J Leggett. The Quantum Measurement Problem. *Science*, 307(5711):871–872, 2005.
- [5] A J Leggett. Probing Quantum Mechanics Towards the Everyday World: Where do we Stand? *Physica Scripta*, 2002(T102):69, 2002.
- [6] Clive Emary, Neill Lambert, and Franco Nori. Leggett–Garg inequalities. *Reports on Progress in Physics*, 77(1):016001, 2014.
- [7] E. Schrödinger. Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik. *Naturwissenschaften*, 23:807–812, November 1935.
- [8] Paul Kwiat et al. Experimental Realization of Interaction-free Measurementsa. *Annals of the New York Academy of Sciences*, 755(1):383–393, 1994.
- [9] Lev Vaidman. The Meaning of the Interaction-Free Measurements. *Foundations of Physics*, 33(3):491–510, Mar 2003.
- [10] Paul Kwiat, Harald Weinfurter, Thomas Herzog, Anton Zeilinger, and Mark A. Kasevich. Interaction-Free Measurement. *Phys. Rev. Lett.*, 74:4763–4766, Jun 1995.
- [11] J. Peise et al. Interaction-free measurements by quantum Zeno stabilization of ultracold atoms. *Nature Communications*, 6, 2015.

- [12] S. Cheung C. Brukner, S. Taylor and V. Vedral. Quantum entanglement in time. *arXiv:quant-ph/0402127 [quant-ph]*, 2004.
- [13] M. Nowakowski. Quantum entanglement in time. *AIP Conference Proceedings*, 1841, 2017.
- [14] Fumiaki Morikoshi. Information-theoretic temporal Bell inequality and quantum computation. *Phys. Rev. A*, 73:052308, May 2006.
- [15] Marek Zukowski. Temporal Leggett-Garg-Bell inequalities for sequential multi-time actions in quantum information processing, and a re-definition of macroscopic realism. *arXiv:1009.1749 [quant-ph]*, 2010.
- [16] Monika Richter, Bartosz Dziewit, and Jerzy Dajka. Leggett-Garg K_3 quantity discriminates between Dirac and Majorana neutrinos. *Phys. Rev. D*, 96:076008, Oct 2017.
- [17] Adam Miranowicz, Monika Bartkowiak, Xiaoguang Wang, Yu-xi Liu, and Franco Nori. Testing nonclassicality in multimode fields: A unified derivation of classical inequalities. *Phys. Rev. A*, 82:013824, Jul 2010.
- [18] Carsten Robens, Wolfgang Alt, Dieter Meschede, Clive Emary, and Andrea Alberti. Ideal Negative Measurements in Quantum Walks Disprove Theories Based on Classical Trajectories. *Phys. Rev. X*, 5:011003, Jan 2015.
- [19] Andreas Winter and Dong Yang. Operational Resource Theory of Coherence. *Phys. Rev. Lett.*, 116:120404, Mar 2016.
- [20] Alexander Streltsov, Gerardo Adesso, and Martin B. Plenio. Colloquium: Quantum coherence as a resource. *Rev. Mod. Phys.*, 89:041003, Oct 2017.
- [21] Ryszard Horodecki, Paweł Horodecki, Michał Horodecki, and Karol Horodecki. Quantum entanglement. *Rev. Mod. Phys.*, 81:865–942, Jun 2009.
- [22] Simon Kochen and E. P. Specker. The Problem of Hidden Variables in Quantum Mechanics. *Journal of Mathematics and Mechanics*, 17:59–87, 1967.
- [23] Johannes Kofler and Časlav Brukner. Condition for macroscopic realism beyond the Leggett-Garg inequalities. *Phys. Rev. A*, 87:052115, May 2013.
- [24] M. Markiewicz et al. Unified approach to contextuality, nonlocality, and temporal correlations. *Phys. Rev. A*, 89:042109, Apr 2014.

- [25] John F. Clauser, Michael A. Horne, Abner Shimony, and Richard A. Holt. Proposed Experiment to Test Local Hidden-Variable Theories. *Phys. Rev. Lett.*, 23:880–884, Oct 1969.
- [26] Benni Reznik Shmuel Marcovitch. Structural unification of space and time correlations in quantum theory. *arXiv:1103.2557 [quant-ph]*, 2011.
- [27] Benni Reznik Shmuel Marcovitch. Correlation preserving map between bipartite states and temporal evolutions. *arXiv:1107.2186 [quant-ph]*, 2011.
- [28] Johannes Kofler and Caslav Brukner. Conditions for Quantum Violation of Macroscopic Realism. *Phys. Rev. Lett.*, 101:090403, Aug 2008.
- [29] Vikram Athalye, Soumya Singha Roy, and T. S. Mahesh. Investigation of the Leggett-Garg Inequality for Precessing Nuclear Spins. *Phys. Rev. Lett.*, 107:130402, Sep 2011.
- [30] Costantino Budroni, Tobias Moroder, Matthias Kleinmann, and Otfried Gühne. Bounding Temporal Quantum Correlations. *Phys. Rev. Lett.*, 111:020403, Jul 2013.
- [31] Alain Aspect, Jean Dalibard, and Gérard Roger. Experimental Test of Bell’s Inequalities Using Time-Varying Analyzers. *Phys. Rev. Lett.*, 49:1804–1807, Dec 1982.
- [32] Gregor Weihs, Thomas Jennewein, Christoph Simon, Harald Weinfurter, and Anton Zeilinger. Violation of Bell’s Inequality under Strict Einstein Locality Conditions. *Phys. Rev. Lett.*, 81:5039–5043, Dec 1998.
- [33] M. A. Rowe et al. Experimental violation of a Bell’s inequality with efficient detection. *Nature*, 409, 2001.
- [34] M. Ansmann et al. Violation of Bell’s inequality in Josephson phase qubits. *Nature*, 461, 2009.
- [35] Asher Peres. Quantum Limitations on Measurement of Magnetic Flux. *Phys. Rev. Lett.*, 61:2019–2021, Oct 1988.
- [36] C. D. Tesche. Can a noninvasive measurement of magnetic flux be performed with superconducting circuits? *Phys. Rev. Lett.*, 64:2358–2361, May 1990.
- [37] A. J. Leggett and Anupam Garg. Comment on “Quantum limitations on measurement of magnetic flux”. *Phys. Rev. Lett.*, 63:2159–2159, Nov 1989.

- [38] Clive Emary. Ambiguous measurements, signaling, and violations of Leggett-Garg inequalities. *Phys. Rev. A*, 96:042102, Oct 2017.
- [39] A. Palacios-Laloy et al. Experimental violation of a Bell's inequality in time with weak measurement. *Nature Physics*, 6:442–447, 2010.
- [40] G. C. Knee et al. Violation of a Leggett–Garg inequality with ideal non-invasive measurements. *Nature Communications*, 3, 2012.
- [41] Hemant Katiyar, Aharon Brodutch, Dawei Lu, and Raymond Laflamme. Experimental violation of the Leggett–Garg inequality in a three-level system. *New Journal of Physics*, 19(2):023033, 2017.
- [42] Costantino Budroni and Clive Emary. Temporal Quantum Correlations and Leggett-Garg Inequalities in Multilevel Systems. *Phys. Rev. Lett.*, 113:050401, Jul 2014.
- [43] J. A. Formaggio, D. I. Kaiser, M. M. Murskyj, and T. E. Weiss. Violation of the Leggett-Garg Inequality in Neutrino Oscillations. *Phys. Rev. Lett.*, 117:050402, Jul 2016.
- [44] Wojciech Hubert Zurek. Decoherence, einselection, and the quantum origins of the classical. *Rev. Mod. Phys.*, 75:715–775, May 2003.
- [45] K. Lendi and A. J. van Wonderen. Davies theory for reservoir-induced entanglement in a bipartite system. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 40(2):279, 2007.
- [46] J. Dajka, J. Łuczka, and P. Hänggi. Geometric phase as a determinant of a qubit–environment coupling. *Quantum Information Processing*, 10(1):85–96, 2011.
- [47] M Szeląg, J Dajka, E Zipper, and J Łuczka. Heat Currents in Non-Superconducting Flux Qubits. *Acta Physica Polonica B*, 39:1177, 2008.